Ikaskuntza Akademikora bideratutako Matematika

DBH 4B

11. kapitulua:

Funtzio polinomikoak, zatika definituak eta alderantzizko proportzionalak

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Egilea: David Miranda Suárez

Berrikuslea: María Molero

Ilustrazioak: INTEFeko Irudi Bankua

Itzultzailea: Alex Aginagalde IRALE 400

Aurkibidea

1. LEHENENGO MAILAKO FUNTZIO POLINOMIKOAK

1.1. PROPORTZIONALTASUN ZUZENA

1.2. FUNTZIO LINEALA. $y = m \cdot x = mx$ FORMAKO ZUZENA

1.3. MALDAREN AZTERKETA

1.3.1. MALDAREN INTERPRETAZIO GEOMETRIKOA

1.3.2. MALDAREN BESTE ADIERAZPEN BAT

1.4. $y = m \cdot x + n = mx + n$ FORMAKO ZUZENA

2. BIGARREN MAILAKO FUNTZIO POLINOMIKOAK

2.1. $y = ax^2$ PARABOLA

2.2. TRANSLAZIOAK PLANOAN

2.2.1. TRANSLAZIO BERTIKALAK. OY ARDATZAREKIKO TRANSLAZIOAK: $y = x^2 + k$

2.2.2. TRANSLAZIO HORIZONTALAK. OX ARDATZAREKIKO TRANSLAZIOAK: $y = (x - q)^2$

2.2.3. TRANSLAZIO ZEIHARRAK. ARDATZ BIEKIKO TRANSLAZIOAK: $y = (x - q)^2 + k$

2.2.4. $y = x^2 + rx + s$ FORMAKO PARABOLAK ADIERAZTEN

2.3. FUNTZIO KOADRATIKOA. $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ FORMAKO PARABOLAK

2.3.1. $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ PARABOLAREN ELEMENTUAK

3. ALDERANTZIZKO PROPORTZIONALTASUN FUNTZIOAK

3.1. $y = \frac{k}{x}$ ALDERANTZIZKO PROPORTZIONALTASUN FUNTZIOA

3.1.1. $y = \frac{k}{x}$ HIPERBOLA

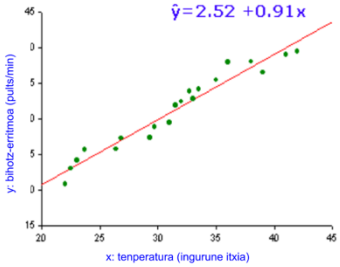
3.2. $y = \frac{k}{x-a} + b$ HIPERBOLA

3.2.1. TRANSLAZIO HORIZONTALAK

3.2.2. TRANSLAZIO BERTIKALAK

3.2.3. TRANSLAZIO ZEIHARRAK

3.3. $y = \frac{mx+n}{px+q}$ HIPERBOLA



Erregresio-zuzen baten adibidea

4. ZATIKA DEFINITUTAKO FUNTZIOAK

Laburpena

Eguneroko bizitzan, proportzionaltasun-erlazioak behin eta berriz erabiltzen ditugu; esate baterako, supermerkatuko produkturen bat erostean,argi-tarifa bi konparatu nahi ditugunean.Kasu horietan, adierazpen grafikoek erabakia hartzen laguntzen digute eta adierazpen horiek *zuzenak* dira. Bestalde, parabolak erabiltzen dira objektuen jaurtiketa edo tiro parabolikoa, edalontzi bat urez betetzea edo nonbaitetik salto egitean ibilitakoa adierazteko.

Unitate honetan, proportzionaltasun zuzen eta alderantzizkoaren ezaugarri garrantzitsuenak eta plano kartesiarrean horiek adierazteko behar ditugun elementuak ikasiko ditugu. Funtzio horiek oso erabilgarriak dira zientzian datuak konparatzeko eta datuek beren artean erlazio linealik (zuzen bat bezala jokatzen dute) edo beste era bateko erlaziorik (polinomikoak, esponentzialak…) duten jakiteko.

Adibidez, erregresio-analisia erabilita, datuek sortutako kurbak aztertzen dira estatistikan. Datuak zuzen batera edota parabola batera hurbilduta, ikerketak eta iragarpenak egin daitezke.

Hasi baino lehen, gogora dezagun

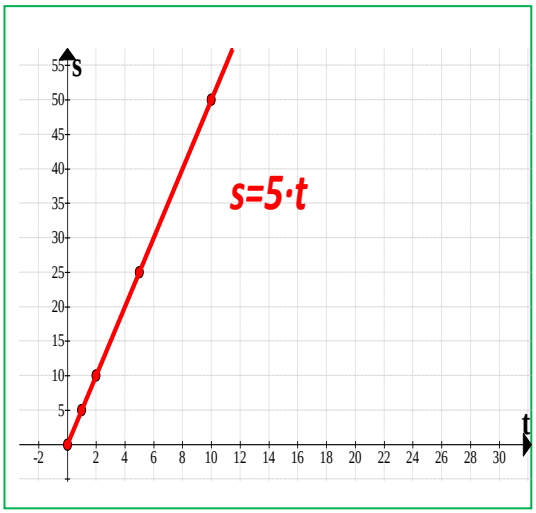
Ebatzitako jarduerak

Edukia zuzenean lantzen hasi baino lehen, adieraz ditzagun grafiko bidez egoera hauek:

- **1. egoera**: Higidura Zuzen Uniformearen (HZU) $s - t$ grafikoa. Adibidez, txirrindulari batek denboraren arabera, 5 m/s-ko abiaduran, ibilitako espazioaren funtzioa.

  Higidura uniformea denez, $v = s \cdot t$ formula aplikatuko dugu ibilitako espazioa deskribatzeko. Kasu honetan, $v = 5$ m/s dela kontuan izanda ibilitako espazioa deskribatzeko.

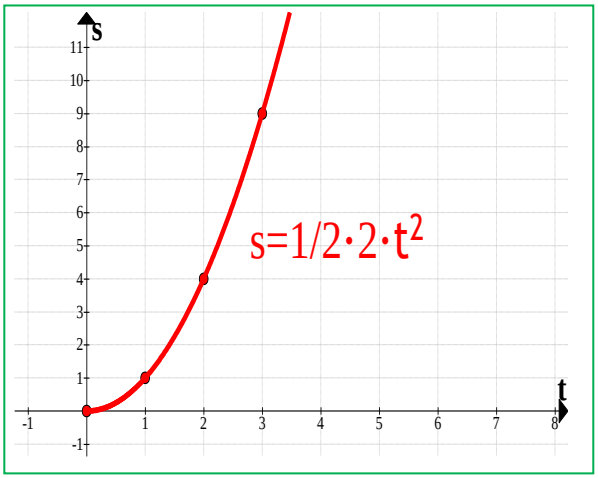
Denbora (t)	Espazioa (s)
0	0
1	5
2	10
5	25
10	50



- **2. egoera:** Higidura Uniforme Azeleratuaren (HUZ) $v - t$ grafikoa. Adibidez, txirrindulari batek denboraren arabera, 2 m/s^2-ko azelerazioan, ibilitako espazioaren funtzioa.

  Kasu horretan, $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ formula erabiliko dugu ibilitako espazioa deskribatzeko; hasierako espazioa (s_0) eta hasierako abiadura (v_0) nuluak dira. Beraz, $s = \frac{1}{2} 2 \cdot t^2 = t^2$ adieraziko dugu.

Denbora (t)	Espazioa (s)
0	0
1	1
2	4
3	9

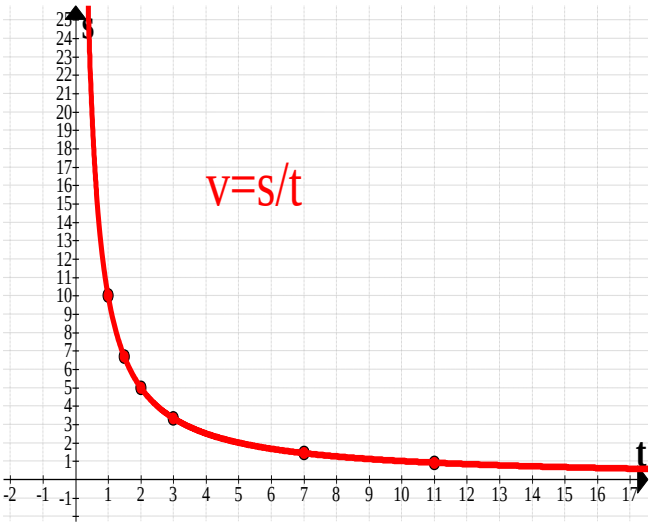


- **3. egoera:** 10 m-ko espazioa ibiltzen duen txirrindulari baten denboraren araberako abiadura

adieraziko dugu.

Deskribatutako Higidura Uniforme Zuzena (HUZ) da; beraz, hori adierazteko erabiliko dugun formula $v = \frac{s}{t}$ da. Gure kasuan, $v = \frac{10}{t}$, 10 metro baita txirrindulariak ibilitako espazioa.

Denbora (t)	Abiadura (v)
1	10
1,5	6,67
2	5
3	3,33
5	2
7	1,43
11	0,91



1. LEHENENGO MAILAKO FUNTZIO POLINOMIKOAK

1.1. Proportzionaltasun zuzena

Bi magnitude **zuzenki proportzionalak** dira lehena zenbaki batez biderkatu edo zatitzen badugu bigarrena zenbaki beraz biderkatuta edo zatituta geratzen bada.

Aldagai baten eta haren proportzionala den beste baten arteko zatiketa egitean lortzen den balioa, $\boldsymbol{k}$ idatziko duguna, **proportzionaltasun-arrazoia** deitzen da.

Adibidea:

- *1· Egoeran, espazioaren eta denboraren arteko erlazioa zuzenki proportzionala da:*

Denbora (t)	0	1	2	5	10
Espazioa (s)	0	5	10	25	50

eta proportzionaltasun-arrazoia $k=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{25}{5}=\frac{50}{10}=5$ *da·*

Grafikoa behatzen badugu, koordenatu-jatorritik abiatzen den zuzenerdia dela ikusten dugu· Denbora ezin denez negatiboa izan, zuzenerdi bidez adierazten dugu eta, beraz, funtzioaren definizio-eremua $[\mathbf{0},+\infty)$ *da·*

Bi **magnitude zuzenki proportzionalen** plano kartesiarreko adierazpen grafikoa koordenatu-jatorritik igarotzen den **zuzena** da beti.

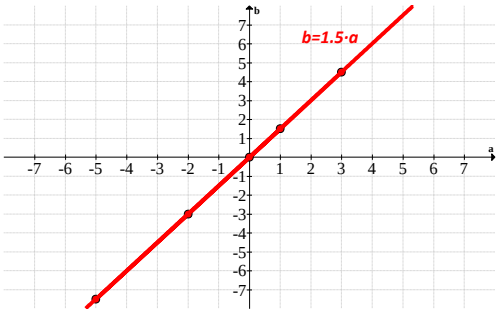
A magnitudearen (a aldagaia) eta B magnitudearen (b aldagaia) arteko erlazioa $b = k \cdot a$ idatz daiteke, non k **proportzionaltasun-arrazoia** den.

Zuzenki proportzionalak diren erlazio horiek adierazteko, balio-taulako puntuak plano kartesiarrean kokatuko ditugu eta zuzen baten bidez lotu.

Ebatzitako jarduerak

- **Adierazi grafikoki taula honetan emandako proportzionaltasun zuzeneko erlazioa:**

A magnitudea (a)	−5	−2	0	1	3
B magnitudea (b)	−7,5	−3	0	1,5	4,5



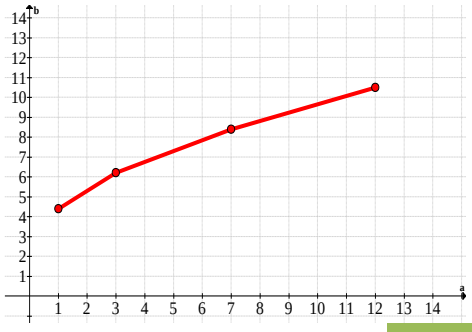
Proportzionaltasun-arrazoia kalkulatuko dugu:

$$k=\frac{-7{,}5}{-5}=\frac{-3}{-2}=\frac{1{,}5}{1}=\frac{4{,}5}{3}=1{,}5$$

Bestalde, erlazioa $b = 1{,}5 \cdot a$ da.

- **Beheko taulan, haur jaioberri batek lehenengo hilabeteetan duen pisua erregistratu da. Eraiki taulari dagokion grafikoa, eta erabaki magnitudeak zuzenki proportzionalak diren ala ez.**

Hilabeteak	1	3	7	12



Pisua (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5

Puntuak planoan adieraztean azaltzen den grafikoa ez dela zuzen bat ikusten da; beraz, bi magnitudeak **ez dira zuzenki proportzionalak**.

Proposaturiko jarduerak

1. Egunean, 142 litro kontsumitzen da biztanleko (2011ko neurketen arabera). Adierazi grafikoki pertsona batek astean kontsumitutako ur-kantitatea.

2. Produktu bat ekoizteko behar den ur-kantitateari *ur birtuala* deritzo. Adierazi grafikoki erlazio hauek:

a. 71 litro ur sagar bat ekoizteko.

b. 10.850 litro ur praka bakero-pare bat ekoizteko.

c. 4.000 litro ur kamiseta bat ekoizteko.

d. 15.400 litro ur behi-xerra kilo bat ekoizteko.

1.2. Funtzio lineala. $y = m \cdot x = mx$ formako zuzena

Esan bezala, zuzenki proportzionalak diren bi magnitude erlazionatzen dituen adierazpena koordenatu-jatorritik igarotzen den zuzen bat da. Beraz, proportzionaltasun zuzenaren erlazioa funtzio lineala da.

Funtzio lineal bat lehenengo mailako funtzio polinomikoa da, eta plano kartesiarrean duen adierazpena **zuzen** bat da.

Bi dira funtzio lineal motak:

- $y = m \cdot x = mx$ formako zuzenak.
- $y = m \cdot x + n = mx + n$ formako zuzenak.

Atal honetan lehenengo formakoak aztertuko ditugu.

Adibideak:

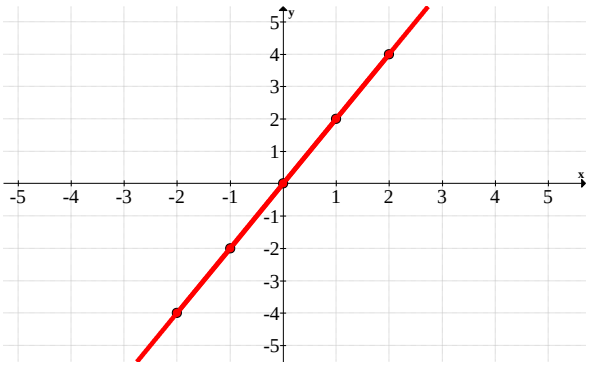
- *Proportzionaltasun zuzenak $b = k \cdot a$ formako zuzen bezala adierazten dira.*
  - *non k proportzionaltasun-arrazoia den, $k = \frac{b}{a}$*
  - *a eta b, A eta B magnitudeek hartzen dituzten balioak diren.*
- *Produktu baten pisu-kostu erlazioa proportzionaltasun zuzena da eta $y = m \cdot x$ zuzenaren bidez adierazten da.*
- *Fisikan aurkitu ditzakegun erlazio asko eta asko proportzionaltasun zuzenak dira eta zuzenak erabiliz adierazten dira. Adibidez: denbora-espazioa, dentsitatea-pisua, masa-indarra...*

Ebatzitako jarduerak

- **Adierazi $y = 2x$ zuzena**

  Balio-taula eraiki, eta puntuak plano kartesiarrean kokatuko ditugu. Puntuak lotzean azaltzen da zuzena.

  y aldagaia x aldagaiari balioak emanez definitzen da. Beraz, x aldagaia independentea dela esango dugu (edozein balio eman diezaiokegu, definizio-eremua $\mathbb{R}$ osoa delako), eta y aldagaia mendekoa dela esango dugu (x aldagaiaren balioen mende baitago).



  Oharra: zuzen bat adierazteko nahikoa da bi puntu emanda, baina gomendatzen da hiru puntu edo gehiago ematea benetan zuzena ongi adierazi dugula ziurtatzeko.

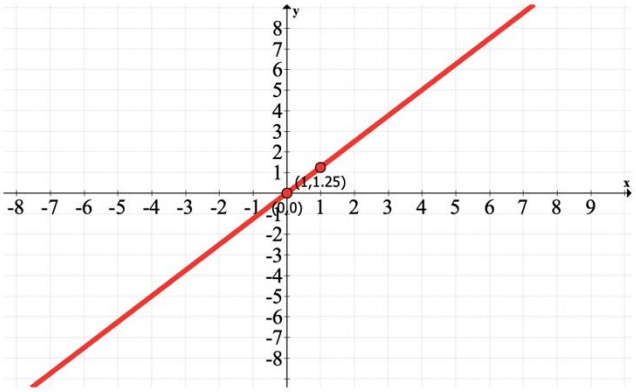
$y = m \cdot x = mx$ zuzenak osagai hauek ditu:

- x , aldagai **independentea** edo **askea** da.
- y , **mendeko** aldagaia da.
- m , zuzenaren **malda** da, eta zuzen bat beste batetik desberdintzen duen parametroa da.

Ezaugarri garrantzitsuenak hauek dira:

- Koordenatu-jatorritik pasatzen da, hau da, $(0,0)$ puntua zuzeneko puntua da.
- Definizio-eremua eta ibilbidea zenbaki erreal denak dira: bai x-k eta bai y-k edozein balio onartzen dute.
- Koordenatu-jatorriarekiko simetrikoa da, hots, funtzio bakoitia da.

Ebatzitako jarduerak



Aztertu $y = 1,25x$ funtzioaren definizio-eremua, maximo eta minimoak, eta simetriak.

Zuzen bat denez, berehala ohartzen gara definizio-eremua zenbaki erreal denak direla, x aldagaiak edozein balio hartu dezakeelako.

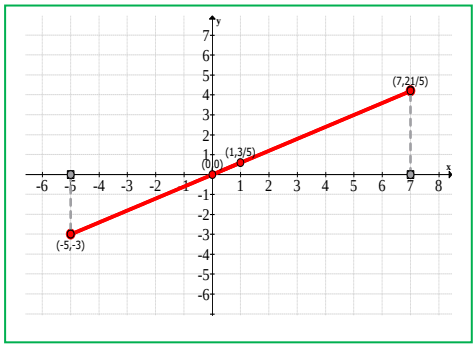
Tarterik kontuan hartzen ez badugu, zuzenak ez du maximorik ezta minimorik ere.

Simetria aztertuko dugu jarraian:

$$f(-x) = 1,25 \cdot (-x) = -1,25 \cdot x = -f(x)$$

beraz, bakoitia da; hau da, koordenatu-jatorriarekiko simetrikoa da.

Aztertu $y = \frac{3}{5} \cdot x$ funtzioa $[-5,7]$ tartean.



Funtzioaren definizio-eremua $[-5,7]$ da.

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x)$; beraz, bakoitia da.

Tartearen muturretan, minimo bat daukagu $(-5,-3)$ puntuan, eta maximo bat $(7,21/5)$ puntuan.

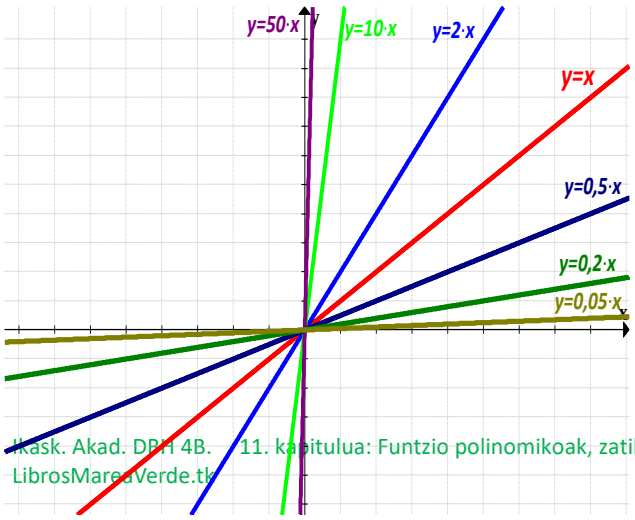
Proposaturiko jarduerak

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

3. Kalkulatu zuzen hauetako bakoitzaren definizio-eremua, maximo eta minimoak, eta simetriak:

a. $y = 4 \cdot x$ b. $y = \frac{x}{3}$ c. $y = 2,65 \cdot x$

1.3. Maldaren azterketa



Zuzen batean, m malda da zuzena beste zuzen batzuetatik bereizten duena. Maldak zuzena abzisa ardatzarekiko zenbat inklinatzen den adierazten du.

Proportzionaltasun zuzeneko erlazioetan, malda eta k proportzionaltasun-arrazoia berdinak dira.

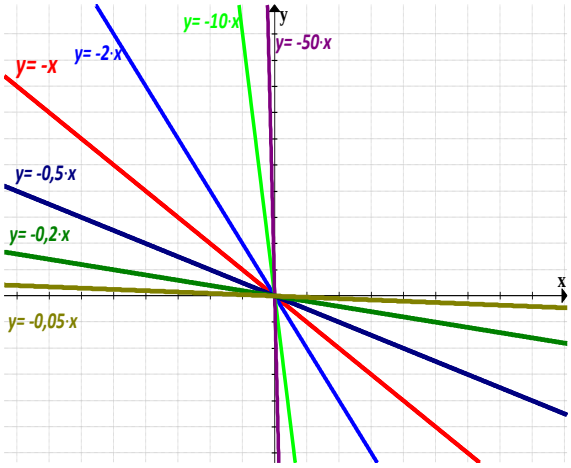
Grafiko honetan, zuzena malda aldatzen (handitzen edo txikitzen) den heinean aldatzen da. $y = x$ zuzenetik hasi gara, non $m = 1$ den.

- m handitzen bada, zuzena gero eta

Egilea: David Miranda
Berrikuslea: María Molero
Itzultzailea: Alex Aginagalde IRALE R400
Ilustrazioak: INTEFeko Irudi Bankua

bertikalagoa egiten da, OY ardatza bilakatu arte. Azken egoera hori ezin da gertatu, hori horrela balitz zuzena ez litzatekeelako funtzioa izango.

- m txikitzen bada, zuzena gero eta horizontalagoa egiten da, OX ardatza bilakatu arte. Azken egoera hori, berriz, gerta daiteke zuzenak funtzioa izaten jarraituko lukeelako, $y = 0$, hain zuzen ere.



Jarraian, m maldak balio negatiboak hartzen dituenean zer gertatzen den aztertuko dugu:

- m handitzen bada, zuzena gero eta horizontalagoa egiten da, OX ardatza bilakatu arte. Goian aipatu bezala, kasu berezi honetan, $y = 0$ zuzena lortuko genuke.
- m txikitzen bada, zuzena gero eta bertikalagoa egiten da, OY ardatza bilakatu arte. Goian esan bezala, hori ezin da gertatu, hori horrela balitz zuzena ez litzatekeelako funtzioa izango.

Ikusi bezala, maldaren balioak aldatzean zuzenaren inklinazioa ere aldatu egiten da.

Zuzen baten **malda** zuzen horren inklinazioa adierazten duen balioa da; hau da, funtzio linealaren hazkundea (gorakortasuna edo beherakortasuna) adierazten du:

- $m > 0$ bada, zuzena **gorakorra** da.

- $m < 0$ bada, zuzena **beherakorra** da.

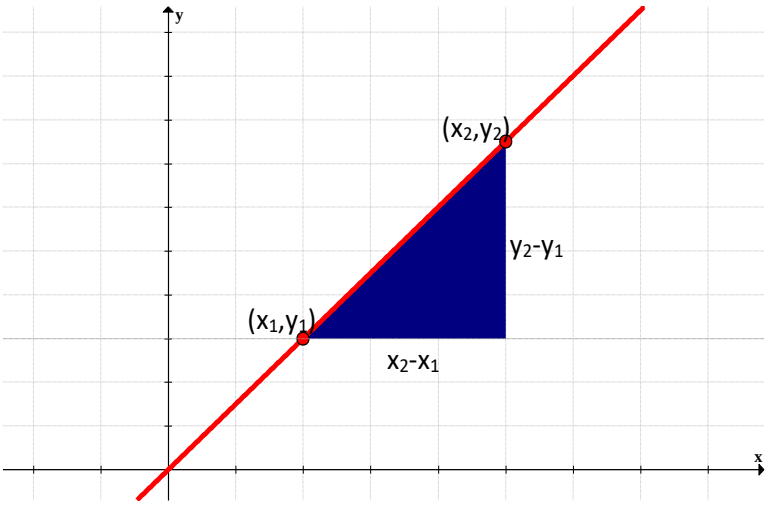
x aldagai independenteak duen koefizientea da malda.

1.3.1 Maldaren interpretazio geometrikoa

Zuzen baten maldak ez du bakarrik funtzioa gorakorra edo beherakorra den esaten, zuzena zenbat hazten den ere adierazten du. Balioetan aurrera egiten dugun heinean, hau da, ezkerretik eskuinera mugitzen garen heinean, zuzena zenbat hazten den adierazten du maldak.

- $m > 0$ bada:
  - m-ren balio handietarako zuzena azkar hazten da; hau da, zuzena asko "igotzen" da baina gutxi "aurreratzen" da.
  - m-ren balio txikietarako zuzena geldo hazten da; hau da, gutxi "igotzen" da eta asko "aurreratzen" da.
- $m < 0$ bada:
  - m-ren balio handietarako zuzena geldo txikitzen da; hau da, gutxi "jaisten" da eta asko "aurreratzen" da.
  - m-ren balio txikietarako zuzena azkar txikitzen da, hau da, zuzena asko "jaisten" da eta gutxi "aurreratzen" da.

Zuzen baten malda kalkulatzeko modu bat, “igotzen” eta “aurreratzen” den balioen arteko zatiketa egitea da, marrazkian ikusten den bezala:



Zuzen bateko edozein bi puntu emanda, **malda** honela kalkulatzen da:

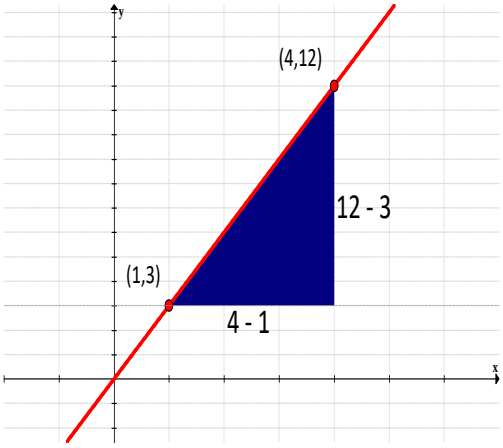
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hau da,

$$m = \frac{\text{bertikalean mugitzen dena}}{\text{horizontalean mugitzen dena}}$$

Oharra: kontuan izan mugitutakoa negatiboa ere izan daitekeela baldin eta beherantz edo atzerantz badoa.

Adibidea:

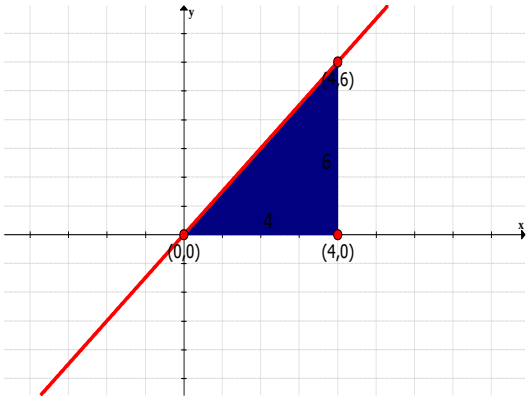


Zuzena 12 - 3 = 9 igo da eta 4 - 1 = 3 aurreratu da, beraz:

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Ebatzitako jarduerak

Kalkulatu zuzen honen malda eta eman bere adierazpen aljebraikoa.



Zuzeneko bi puntu hartuko ditugu: (0,0) eta (4,6).

Ilundutako triangeluaren altuerak zenbat igotzen garen adierazten digu, 6; eta oinarriak, berriz, zenbat aurreratzen garen, 4.

Bi balio horiek zatitzen baditugu, maldaren balioa lortuko dugu: $m = \frac{6}{4} = 1{,}5$

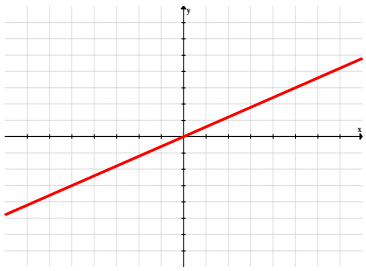
Beraz, zuzenaren ekuazioa $y = 1{,}5x$ izango da.

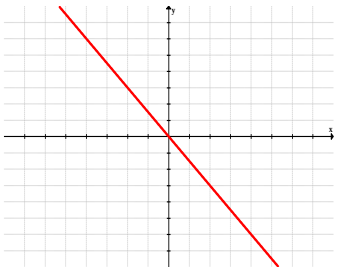
Esan bezala, malda positiboa bada zuzena gorakorra da, eta negatiboa bada, beherakorra. Beraz, malda kalkulatzean, ez erratzeko, beti aztertuko dugu aldakuntza hori ezkerretik eskuinera; hau da, lehenengo puntua ezkerrerago egongo da bigarrena baino eta, beraz, bigarrena baino "txikiagoa" izango da.

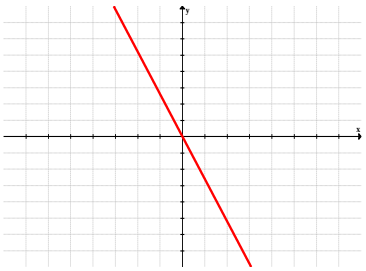
Funtzioan aurrera goazen heinean, maldak funtzioa gorakorra ala beherakorra den esaten digu.

Proposaturiko jarduerak

4. Kalkulatu grafiko hauetako bakoitzaren malda eta adierazpen aljebraikoa:

a. 

b. 

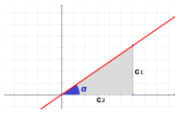
c. 

1.3.2 Maldaren beste adierazpen bat

Malda kalkulatzeko, zuzenaren erpinek osatzen duten triangelu angeluzuzenaren oinarria eta altuera hartzen dira kontuan.

Altueraren eta oinarriaren arteko zatidura malda da. Azaltzen den triangelua angeluzuzena denez, malda bi katetoen arteko zatidura da; hau da, malda zuzenak horizontalarekiko osatzen duen angeluaren tangentea da:

$$m = tan\ \alpha = \frac{\text{kontrako katetua}}{\text{ondoko katetua}} = \frac{c_1}{c_2}$$



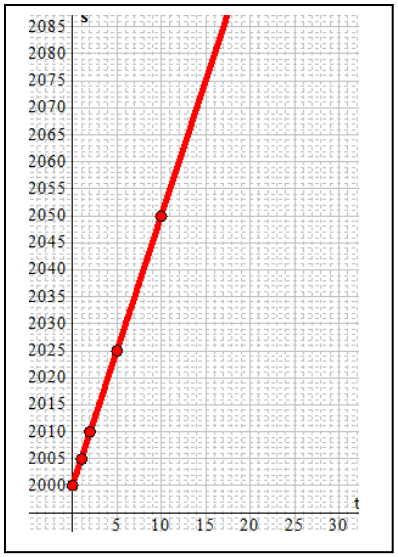
Zuzen baten **malda** abzisa ardatzak eta zuzenak osatzen duten angeluaren tangentea da.

1.4. $y = m \cdot x + n = mx + n$ formako zuzena

Gogora dezagun kapituluaren hasieran aipatu dugun 1. egoera. Txirrindulari batek ibilitako espazioa kalkulatu nahi izan dugu. Demagun orain, ibilbidea hasi baino lehen, txirrindularia 2 km desplazatu behar izan dela irteerarantz.

Ebatzitako jarduerak

- **Higidura Zuzen Uniforme baten $s - t$ grafikoa: ibilbidea hasi baino lehen 2 km desplazatu den eta 5 m/s-ko abiaduran mugitzen den txirrindulari batek ibilitako denboraren araberako espazioa.**



Kasu honetan, Higidura Zuzen Uniformearen (HZU) formula hau da: $s = s_0 + vt$. Dauzkagun datuekin, honela geratzen da: $s = 2.000 + 5t$.

Balio-taula eraiki, eta grafikoa adierazi dugu.

Ohartu eskala aldatu dugula, zuzena OY ardatzean 2.000 posizio igo delako.

Zuzen honen grafikoaren adierazpen aljebraikoa $y = 5x + 2.000$ da, non x denbora (t), y espazioa (s) eta 2.000 hasierako espazioa (s_0) diren.

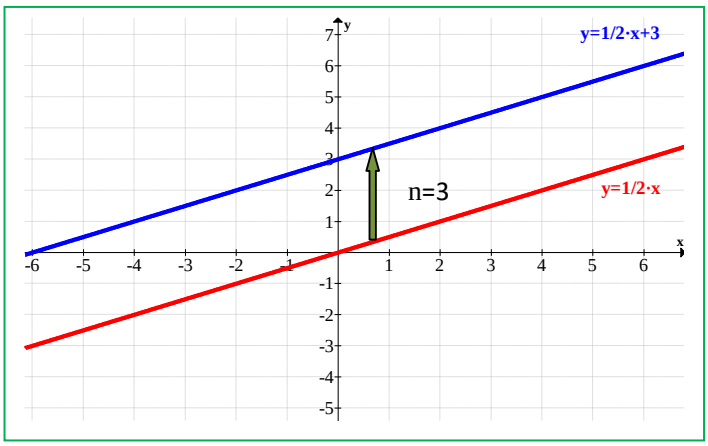
Malda 5 da, baina ez da koordenatu-jatorritik igarotzen ordenatuen ardatza 2.000,0 puntuan ebakitzen baitu. Kasu honetan, jatorriko ordenatuen balioa 2.000 dela esaten da.

Denbora (t)	Espazioa (s)
0	2.000
1	2.005
2	2.010
5	2.025
10	2.050

$y = mx + n$ zuzenaren maldak eta $y = mx$ zuzenaren maldak balio bera dute, baina lehena abzisa ardatzean (OY ardatzean) n posizio transladatuta dago. Horregatik, n **jatorriko ordenatuen balio** bezala ezagutzen da, $x = 0$ kasurako funtzioak hartzen duen balioa baita.

Adibidea:

- *Konpara ditzagun $y = 1/2 \cdot x$ eta $y = 1/2 \cdot x + 3$ zuzenak.*



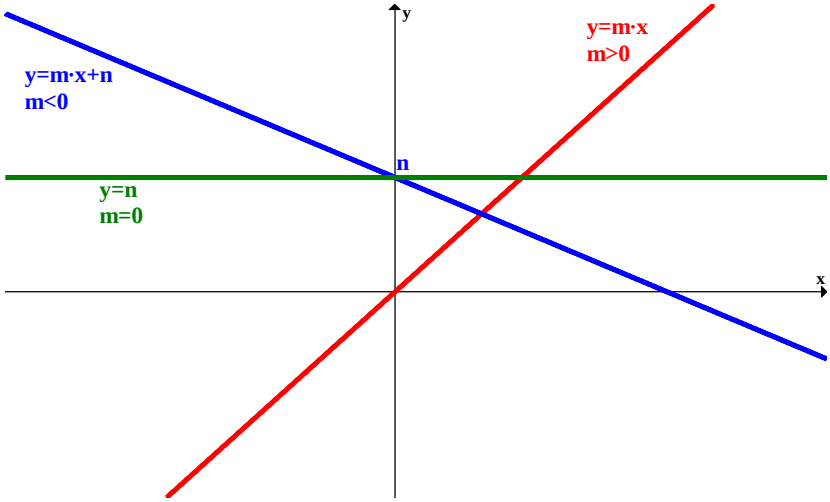
Bi zuzenek dute forma bera; hau da, inklinazio edo malda bera dute: $m = 1/2$. Ondorioz, bi zuzenak paraleloak dira.

Ezberdintasuna n balioan dago. $y = 1/2\,x$ zuzenean $n = 0$ da eta $y = 1/2\,x + 3$ zuzenaren kasuan, $n = 3$ denez, zuzena OY ardatzean 3 posizio transladatu da gorantz

Lehenengo mailako funtzio polinomikoak edo **funtzio linealak** deiturikoek aljebraikoki $y = mx + n$ forma dute, eta haien adierazpen grafikoa lerro zuzenak dira.

$y = mx + n$ zuzena $y = mx$ zuzenaren paraleloa da (malda bera daukate, m) n posizio transladatuta dago OY ardatzean. Beraz, funtzio horren hazkundeak $y = mx$ funtzioaren portaera bera du:

- $m > 0$ bada, funtzioa **gorakorra** da.
- $m < 0$ bada, funtzioa **beherakorra** da.
- $m = 0$ bada, funtzioa **konstantea** da. OX ardatzarekiko paraleloa da, eta $y = n$ puntutik igarotzen da.



$y = mx$ eta $y = mx + n$ funtzioak **funtzio linealak** izenez ezagutzen dira; bigarrena **funtzio afin** izenez ere ezagutzen da.

Proposaturiko jarduerak

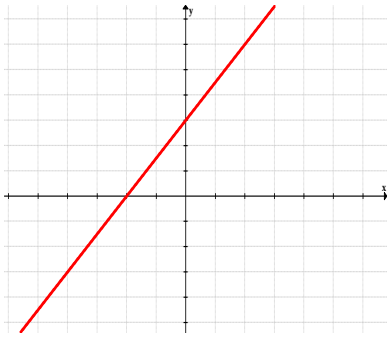
5. Adierazi funtzio hauek:

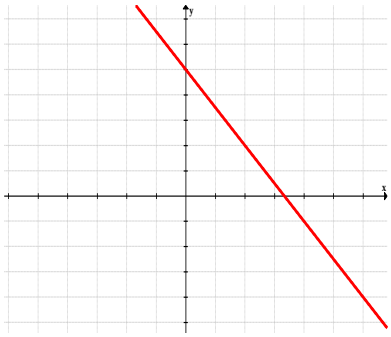
a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

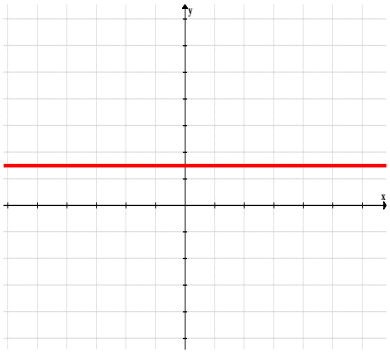
6. Bilatu zuzen hauetako bakoitzaren adierazpen aljebraikoa:

a. b.

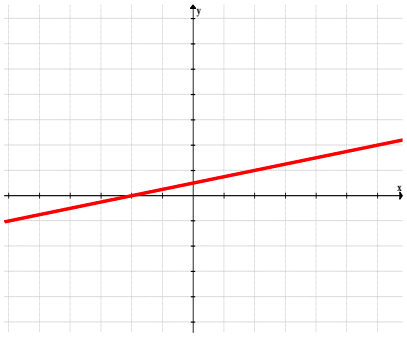




c.



d.



2. BIGARREN MAILAKO FUNTZIO POLINOMIKOAK

Aurreko atalean lehenengo mailako funtzio polinomikoen adierazpen grafikoa aztertu dugu. Atal honetan, berriz, bigarren mailako funtzio polinomikoak nola adierazi ikasiko dugu. Funtzio mota honen grafikoa kapituluaren hasieran aztertutako 2. egoeran azaldu zaigun grafikoaren antzekoa da.

Bigarren mailako funtzio polinomikoen adierazpen orokorra hau da: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$.

Grafikoki adierazita **parabolak** dira.

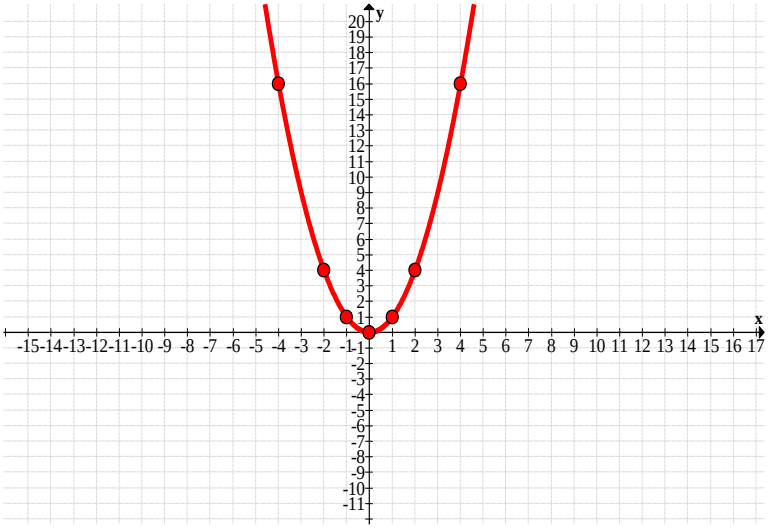
Adibidea:

- *Fisikan, zenbait mugimenduren ibilbidea parabolak erabiliz adierazten da, eta hortik dator tiro paraboliko kontzeptua: jaurtigailu bat angelu zehatz batez jaurtitzea, hegazkin-ontzi batean hegazkin batek lur hartzea, etab· dira tiro parabolikoaren zenbait adibide·*

2.1. $y = a \cdot x^2$ parabola

$y = x^2$ parabola adieraziko dugu. Horretarako, balio-taula eraikiko dugu, puntuak plano kartesiarrean adierazi eta elkarrekin lotuko ditugu.

x	y
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



Taulan eta grafikoan zenbait berezitasun ikusten dira:

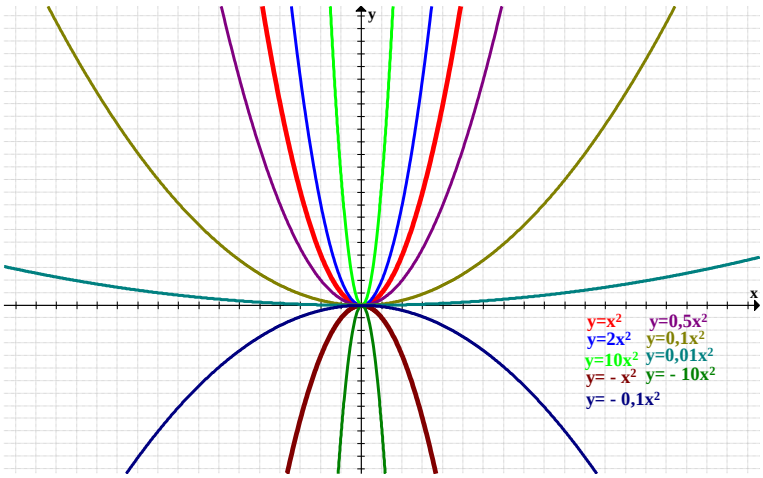
- Definizio-eremua zuzen erreal osoa da. Ibiltartean, berriz, zenbaki erreal ez negatiboek osatzen dute.
- Funtzioa jarraitua da grafikoan ez dugulako jauzirik ikusten.
- Simetrikoa da OY ardatzarekiko, hau da, funtzio bikoitia da:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Beherakorra da $(-\infty, 0)$ tartean eta gorakorra $(0, +\infty)$ tartean; beraz, $(0,0)$ puntuan minimo absolutu bat du.

Aztertu dugun kasu honetan $a = 1$ da eta grafikoa ahurra da; $a = -1$ kasuan parabolak forma bera dauka baina ganbila da, eta, ondorioz, minimo bat izan beharrean maximo bat dauka $(0,0)$ puntuan.

Ikus dezagun zer gertatzen den a-ren balioa handitzen eta txikitzen dugunean:



- $a > 0$ bada:
  - a handitzean, parabola estutu egiten da, eta OY ardatzera hurbiltzen da.

- a txikitzean, parabola zabaldu egiten da (lauagoa egiten da), eta OX ardatzera hurbiltzen da.

- $a < 0$ bada:
  - a handitzean, parabola zabaldu egiten da (lauagoa egiten da), eta OX ardatzera hurbiltzen da.
  - a txikitzean, parabola estutu egiten da, eta OY ardatzera hurbiltzen da.

Laburbilduz: $\boldsymbol{y = ax^2}$ adierazpen aljebraikoa duten parabolek ezaugarri hauek dituzte:

- Definizio-eremua **zuzen erreal osoa** da.
- **Jarraituak** dira definizio-eremu osoan.
- $a > 0$ bada, parabola **ahurra** da, eta ibiltartea zenbaki erreal ez-negatiboak dira. Gainera, $(0,0)$ puntuan **minimo absolutu**a dauka.
- $a < 0$ bada, **parabola** ganbila da, eta ibiltartea zenbaki erreal ez-positiboak dira. Gainera, $(0,0)$ puntuan **maximo absolutu**a dauka.

(0,0) puntu horri parabolaren **erpina** deitzen zaio.

- Funtzio **bikoitia** da, hau da, OY ardatzarekiko simetrikoa da.

Proposaturiko jarduerak

7. Marraztu beste parabola hauek $y = x^2$ parabolan oinarrituta:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

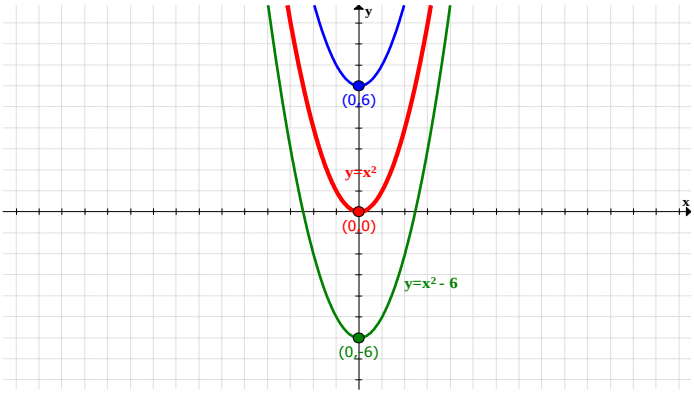
d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

2.2. Translazioak planoan

$y = x^2$ funtzioaren grafikoa erabilita, aplikatutako translazioaren arabera, beste zenbait parabola konplikatuagoren grafikoak lor daitezke.

2.2.1. Translazio bertikalak. OY ardatzarekiko translazioak: $\boldsymbol{y = x^2 + k}$

Kasu honetan, parabola bertikalki transladatuko dugu, hau da, gorantza edo beherantza. Gure jatorrizko parabola, $y = x^2$, beste bi parabola hauekin konparatuko dugu: $y = x^2 + 6$ eta $y = x^2 - 6$.



$y = x^2$ parabolari 6 unitate batzean $y = x^2 + 6$, grafiko bera da, baina 6 unitate gora (OY ardatzean noranzko positiboan) transladatu da. Beraz, erpin berria $(0,6)$ puntua izango da.

$y = x^2$ parabolari 6 unitate kentzean, $y = x^2 - 6$, grafiko bera da, baina 6 unitate behera (OY ardatzean noranzko negatiboan) transladatu da. Beraz, erpin berria $(0, -6)$ puntua izango da.

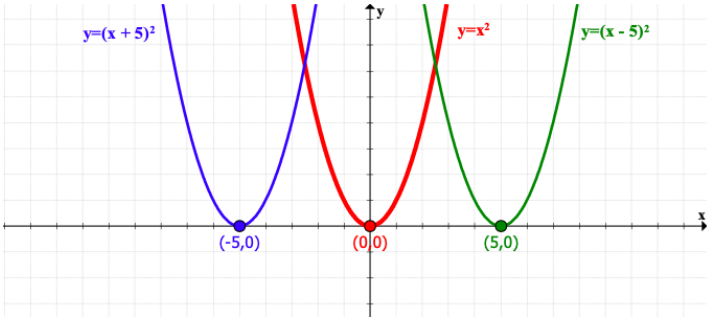
Orokorrean, $y = x^2 + k$ parabolak eta $y = x^2$ parabolak forma bera dute, baina k unitate transladatu da OY ardatz bertikalean.

- $k > 0$ bada, **gorantz** transladatzen da.
- $k < 0$ bada, **beherantz** transladatzen da.

Parabolaren **erpina** $(0, k)$ da.

2.2.2. Translazio horizontalak. OX ardatzarekiko translazioak: $y = (x - q)^2$

Parabola ardatz horizontalean transladatuko dugu orain, eskuinerantz edo ezkerrerantz. Gure jatorrizko parabola, $y = x^2$, beste bi parabola hauekin konparatuko dugu: $y = (x + 5)^2$ eta $y = (x - 5)^2$.



Karratura jaso dugun aldagaia handitzean, hau da, 5 unitate batzean parentesi barruan, grafikoa 5 unitate transladatu da ezkerrerantz; eta, beraz, erpina $(-5,0)$ da.

Karratura jaso dugun aldagaia txikitzean, hau da, 5 unitate kentzean parentesi barruan, grafikoa 5 unitate transladatu da eskuinerantz; eta, beraz, erpina $(5,0)$ da.

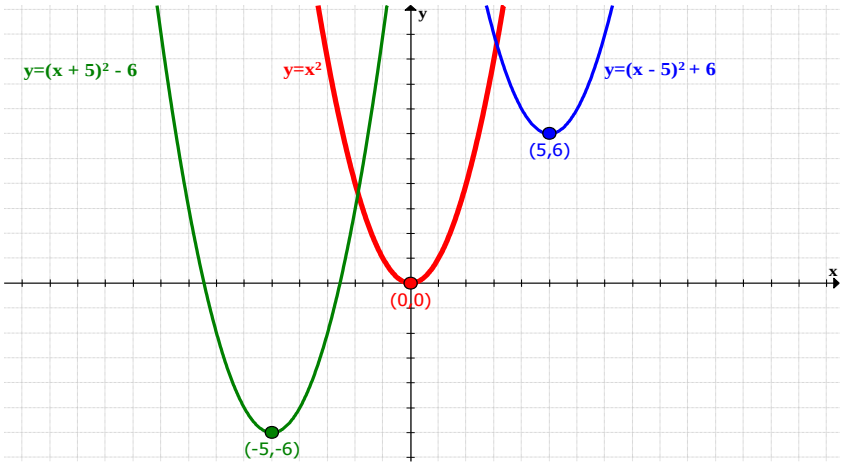
Orokorrean, $y = (x + q)^2$ parabolak eta $y = x^2$ parabolak forma bera dute, baina lehenengoa k unitate transladatu da OX ardatz horizontalean.

- $q > 0$ bada, **eskuinerantz** transladatzen da.
- $q < 0$ bada, **ezkerrerantz** transladatzen da.

Parabolaren **erpina** $(q, 0)$ da.

2.2.3. Translazio zeiharrak. Ardatz biekiko translazioak: $y = (x - q)^2 + k$

Azken mugimendua aurreko bien konbinazioa da, hau da, $y = x^2$ parabola k unitate transladatzen dugu bertikalki eta q unitate horizontalki; ondorioz, parabola planoan zeiharki transladatu dela diogu. Gure jatorrizko parabola, $y = x^2$, beste parabola bikote hauekin konparatuko dugu: $y = (x + 5)^2 + 6$ eta $y = (x - 5)^2 - 6$.



$y = (x - 5)^2 + 6$ parabola 5 unitate transladatu da eskuinerantz eta 6 unitate gorantz, erpina $(5,6)$ izatera pasatu da.

$y = (x + 5)^2 - 6$ parabola 5 unitate transladatu da ezkerrerantz eta 6 unitate beherantz, erpina $(-5, -6)$ izatera pasatu da.

Orokorrean, $\boldsymbol{y = (x + q)^2 + k}$ parabolak $y = x^2$ parabolaren forma bera dauka, baina honela transladatu da:

$$q \text{ unitate } \begin{cases} \text{eskuinera } q > 0 \text{ denean} \\ \text{ezkerrera } q < 0 \text{ denean} \end{cases} \qquad k \text{ unitate } \begin{cases} \text{gorantz } k > 0 \text{ denean} \\ \text{beherantz } k < 0 \text{ denean} \end{cases}$$

Parabolaren **erpina** (q, k) izatera pasatu da.

2.2.4. $y = x^2 + rx + s$ formako parabolak adierazten

Translazioak erabilita badakigu $y = (x - q)^2 + k$ formako parabolak adierazten. Nola adieraz dezakegu $y = x^2 + rx + s$ formako parabola? Nahikoa da aljebra erabiltzea.

Ebatzitako jarduerak

- **Adierazi $y = x^2 + 6 \cdot x - 4$ funtzio koadratikoaren grafikoa.**

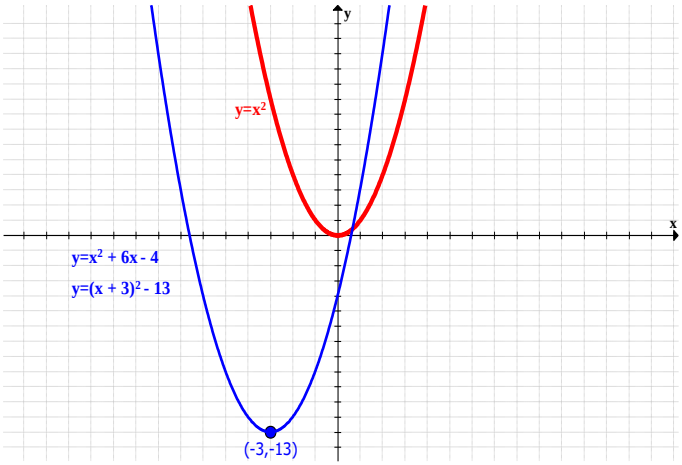
  Funtzioak $y = x^2 + rx + s$ forma dauka eta $y = (x - q)^2 + k$ formara pasatu nahi dugu.

$$y = x^2 + r \cdot x + s \Leftrightarrow y = (x - q)^2 + k$$

  Badakigu $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ dela, non $x^2 + 6x$ azaltzen den. Falta dena doitu besterik ez dugu egin behar:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x+3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x+3)^2 - 13}$$

Parabola horrela adierazita daukagunean, $y = x^2$ parabolaren translazioak egingo ditugu: 3 unitate ezkerrera eta 13 unitate behera, eta erpina $(-3, -13)$ izango da.



Parabola baten erpina, $x = \frac{-r}{2}$ abzisa-balioan dago. Bestalde, y ordenatuen balioa kalkulatzeko funtzioan ordezkatu behar da x balio hori.

Adibidea:

- $y = x^2 + 6 \cdot x - 4$ *kasuan erpina* $(-3, -13)$ *puntuan dago.*

  $r = 6$ *denez, erpinaren abzisa-balioa* $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ *da. Balio hori funtzioan ordezkatuz:* $y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$ *ordenatuen balioa lortzen da.*

Proposaturiko jarduerak

8. Adierazi honako parabola hauen grafikoak eta bilatu horietako bakoitzaren erpina:

a. $y = (x+4)^2 - 5$ b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c. $y = x^2 - 5$

d. $y = x^2 - 6x + 16$ e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f. $y = -x^2 + 12x - 26$

g. $y = x^2 - 10x + 17$ h. $y = -x^2 + 2x - 4$ i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

2.3. Funtzio koadratikoa. $y = ax^2 + bx + c$ formako parabolak

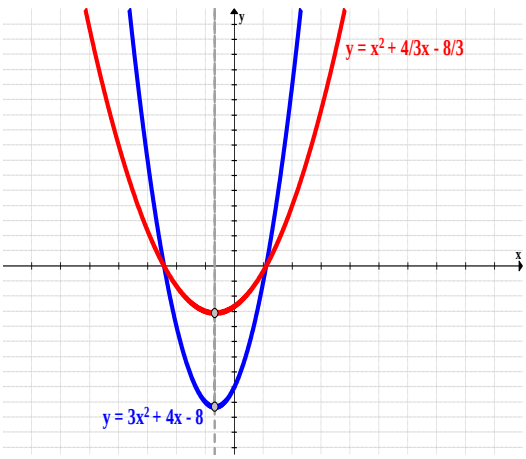
Bigarren mailako funtzio polinomikoak **funtzio koadratiko** izenez ezagutzen dira.

Orain arte, $y = x^2 + rx + s$ formako (ahurra den parabola) edo $y = -x^2 + rx + s$ (ganbila den parabola) funtzioak aztertu ditugu.

Badakigu a koefizienteak $y = ax^2$ parabolaren grafikoari nola eragiten dion: parabola zapaldu edo estutu egiten du.

$y = ax^2 + bx + c$ funtzio koadratikoa adierazteko, ezagunagoa zaigun beste baten forma emango diogu:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$



Ebatzitako jarduerak

- **Adierazi** $y = 3x^2 + 4x - 8$ **parabola.**

  Adierazteko errazagoa den beste baten forma emango diogu:

  $$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}\right)$$

  Eta $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ adierazpenean zentratuko gara:

  $$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = \left(x + \frac{4}{6}\right)^2 - \frac{28}{9}$$

  Bi parabolek erpina abzisa-balio berean daukate, eta y ordenatuen balioa 3z biderkatu dugu.

  Bestalde, parabolaren forma estuagoa da, 2.2. atalean ikusi dugun bezala.

Oro har, $y = ax^2 + bx + c$ funtzioa adierazteko $y = x^2 + rx + s$ parabolaren adierazpideaz balia gaitezke. Biek daukate erpina abzisa-balio berean; eta forma a parametroaren araberakoa da, zapalagoa balio handietarako eta estuagoa balio txikietarako.

Parabolaren kurbadura a parametroaren zeinuaren araberakoa da:

- $a > 0$ bada, **ahurra** da.
- $a < 0$ bada, **ganbila** da.

2.3.1. $y = ax^2 + bx + c$ parabolaren elementuak

Parabolaren elementu esanguratsuenek hura plano kartesiarrean adierazteko balio dute.

a koefizientea:

$a > 0$ bada, parabola **ganbila** da.

$a < 0$ bada, parabola **ahurra** da.

Erpina:

Parabolaren **erpina** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$ puntuan dago:

Badakigu $y = x^2 + rx + s$ formako parabolaren erpinaren abzisa-balioa $\frac{-r}{2}$ dela.

Parabolaren adierazpen orokorra $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$ da, hau da, $r = \frac{b}{a}$ izango da; beraz, erpinaren abzisa-balioa $\frac{-r}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$ izango da.

Ordenatuen balioa $x = \frac{-b}{2a}$ funtzio koadratikoan ordezkatzetik lortzen da.

OX ardatzarekiko ebaketa-puntuak:

Parabolak OX ardatza ebakitzen dituen puntuak dira; hau da, parabola eta $y = 0$ zuzenaren arteko ebakidurak. Parabola noiz den positiboa edo negatiboa adierazten dute. $y = ax^2 + bx + c = 0$ ekuazioa ebaztetik lortzen dira.

OY ardatzarekiko ebaketa-puntua:

Parabolak OY ardatza ebakitzen duen puntua da (bakarra da puntu hau); hau da, parabola eta $x = 0$ zuzenaren arteko ebakidura. $x = 0$ denean, parabolak c balio du; beraz, ebaketa-puntua $(0, c)$ da.

Simetria-ardatza:

Parabola simetrikoa da; haren simetria-ardatza OY ardatzarekiko paraleloa da eta parabolaren erpinetik pasatzen da. Hau da, parabolaren simetria-ardatza $x = \frac{-b}{2a}$ zuzena da.

Simetria-ardatz hori OX ardatzaren ebaketa-puntu bien erdibitzailea ere bada.

Informazio hori guztia izanda, gai gara edozein funtzio koadratiko adierazteko.

Ebatzitako jarduerak

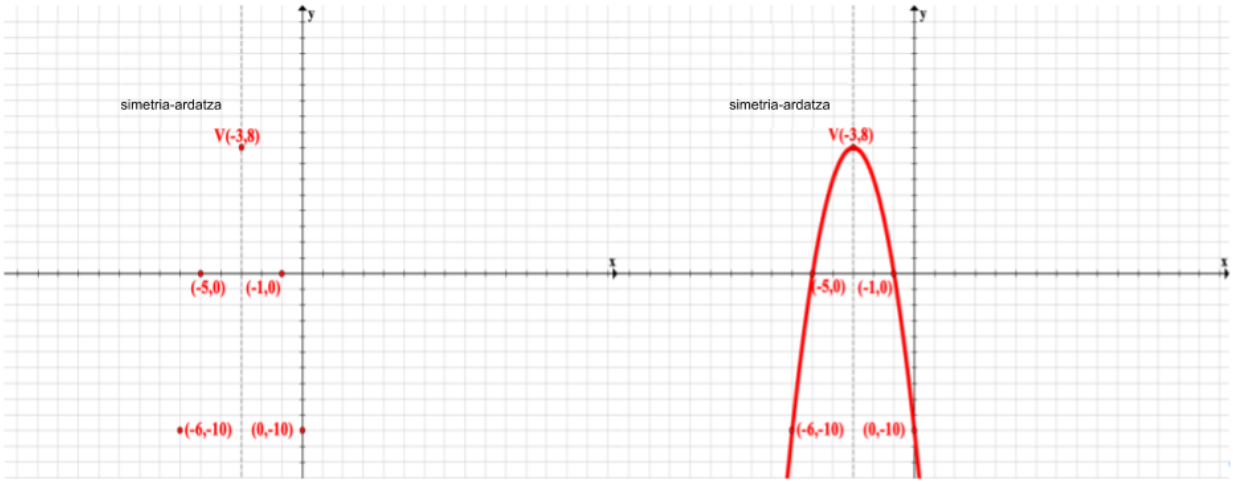
Adierazi $y = -2x^2 - 12x - 10$ parabolaren elementuak.

- $a = -2$, ondorioz, parabola ganbila da.
- Erpina: $\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2(-2)} = \frac{-12}{4} = -3 \\ y = -2(-3)^2 - 12(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{Erpina: } (-3,8)$
- Ebaketa-puntuak:

  OX ardatza: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5,0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1,0) \end{cases}$

  OY ardatza: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0,-10)$

  Parabola, puntu horren simetrikoa den $(-6,-10)$ puntutik ere igarotzen da.
- Simetria-ardatza: $x = -3$ zuzena.



Proposaturiko jarduerak

9. Aurkitu honako parabola hauen elementu esanguratsuak eta adierazi grafikoki:

$y=2x^2+4x-6$	$y=6x^2-24x$	$y=-2x^2+4x-2$
$y=2x^2+5x-12$	$y=3x^2+6x-9$	$y=-2x^2+7x+3$
$y=7x^2+21x-28$	$y=5x^2-9x+4$	$y=-4x^2-4x-1$

3. ALDERANTZIZKO PROPORTZIONALTASUN FUNTZIOAK

3.1. $y=\frac{k}{x}$ alderantzizko proportzionaltasun funtzioa

Bi magnitude **alderantzizko proportzionalak** dira baldin eta bietako bat zenbaki batez biderkatu edo zatitzen dugunean bestea zenbaki horrez zatituta edo biderkatuta geratzen bada. **Alderantzizko proportzionaltasun-arrazoia**, k, magnitude bikoteen biderkadura da: $k=a\cdot b=a'\cdot b'$.

Adibideak:

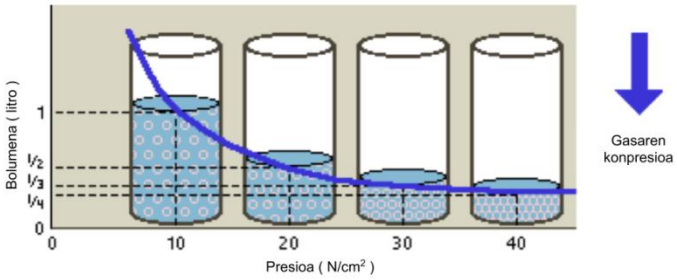
- *Kapituluaren hasierako 3· egoeran abiadura eta denbora alderantzizko proportzionalak diren magnitudeak dira· Kasu horretan, espazioa konstante mantentzen da $s=v\cdot t$ delako proportzionaltasun-arrazoia·*
- *Fisikan alderantzizko proportzionalak diren hainbat magnituderen adibideak aurkitu ditzakegu: dentsitatea eta bolumena, potentzia eta denbora, presioa eta gainazala...*

Ebatzitako jarduerak

- **Adierazi plano kartesiarrean Boyle-Mariotte-ren legea: "tenperatura konstantean, gas masa finko baten bolumena jasaten duen presioarekiko alderantzizko proportzionala da".**

  Legea deskribatzen duen formula $P\cdot V=k$ da.

  Bolumena, V, askatzen badugu, adierazpen hau lortzen dugu: $V=\frac{k}{P}$



  Grafikoan ikusten den kurban presioa handitzen den heinean bolumena txikitu egiten da, eta OX ardatzera hurbiltzen da; eta, alderantziz, presioa txikitzen bada, orduan gasak hartzen duen bolumena handiagoa da.

Alderantzizko proportzionaltasun funtzioak $y=\frac{k}{x}$ adierazpena du, non k alderantzizko proportzionaltasun-arrazoia den, eta x eta y aldagaiak bi magnitudeek dituzten balio posibleak diren.

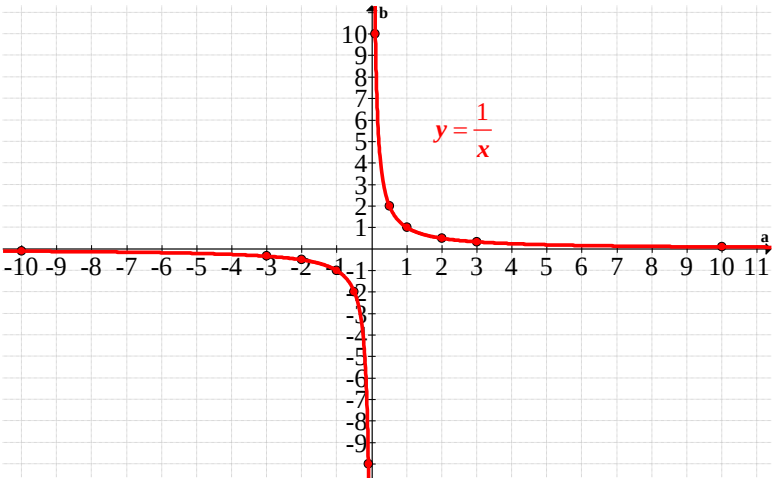
Plano kartesiarrean daukan grafikoari **hiperbola** deitzen zaio.

Adibidea:

Adierazi $y=\frac{1}{x}$ hiperbola·

Balio-taula bat egin eta puntuak plano kartesiarrean kokatuko ditugu:

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/10	1/10	1/2	1	2	3
$y=1/x$	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	½	1/3



Grafikoak ez ditu inoiz ebakitzen ardatz kartesiarrak, 0 ez delako funtzioaren definizio-eremukoa ezta irudikoa ere·

Funtzioa koordenatu-jatorriarekiko simetrikoa da eta jarraitua definizio-eremu osoan, hau da, $\mathbb{R}-\{0\}$n·

3.1.1. $y=\frac{k}{x}$ hiperbola

Proposaturiko jarduerak

10. Adierazi plano kartesiar berean alderantzizko proportzionaltasun funtzio hauek:

a. $y=\frac{-1}{x}$ b. $y=\frac{5}{x}$ c. $y=\frac{1}{2x}$

d. $y=\frac{3}{8x}$ e. $y=\frac{-5}{3x}$ f. $y=\frac{-12}{5x}$

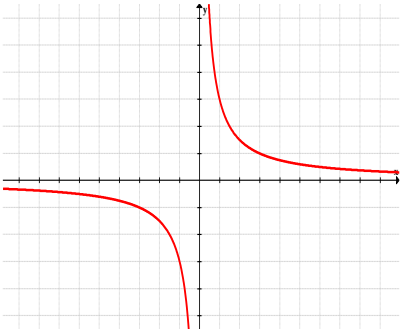
11. Deskribatu zer gertatzen den k parametroaren balioa aldatzen denean, aurreko ariketako grafikoetan oinarrituta.

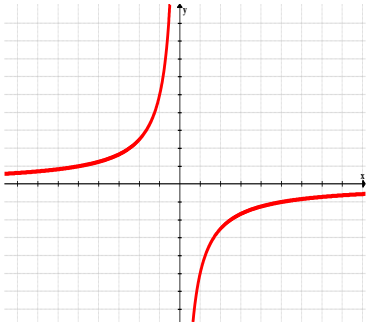
12. Aurkitu puntu hauetatik igarotzen diren hiperbolen adierazpen aljebraikoak eta adierazi grafikoki. Adierazi zein tartetan den funtzioa gorakorra eta zeinetan beherakorra.

a. $(4,2)$ b. $(3,-1)$ c. $(1/3,5)$

d. $(12,3)$ e. $(a,1)$ f. $(1,b)$

13. Kalkulatu hiperbola hauen definizio-eremua, ibilbidea, jarraitutasuna, maximoak eta minimoak, eta hazkundea:

a) 

b) 

14. Kalkulatu hiperbola hauen definizio-eremua, ibilbidea, jarraitutasuna, maximoak eta minimoak, eta hazkundea:

a. $y=\dfrac{9}{2x}$ b. $y=\dfrac{-5}{3x}$ c. $y=\dfrac{-0,3}{x}$

15. Kalkulatu honako puntu hauetatik igarotzen den hiperbolaren adierazpen aljebraikoa eta eman bakoitzaren definizio-eremua, ibilbidea, jarraitutasuna, maximoak eta minimoak, eta hazkundea:

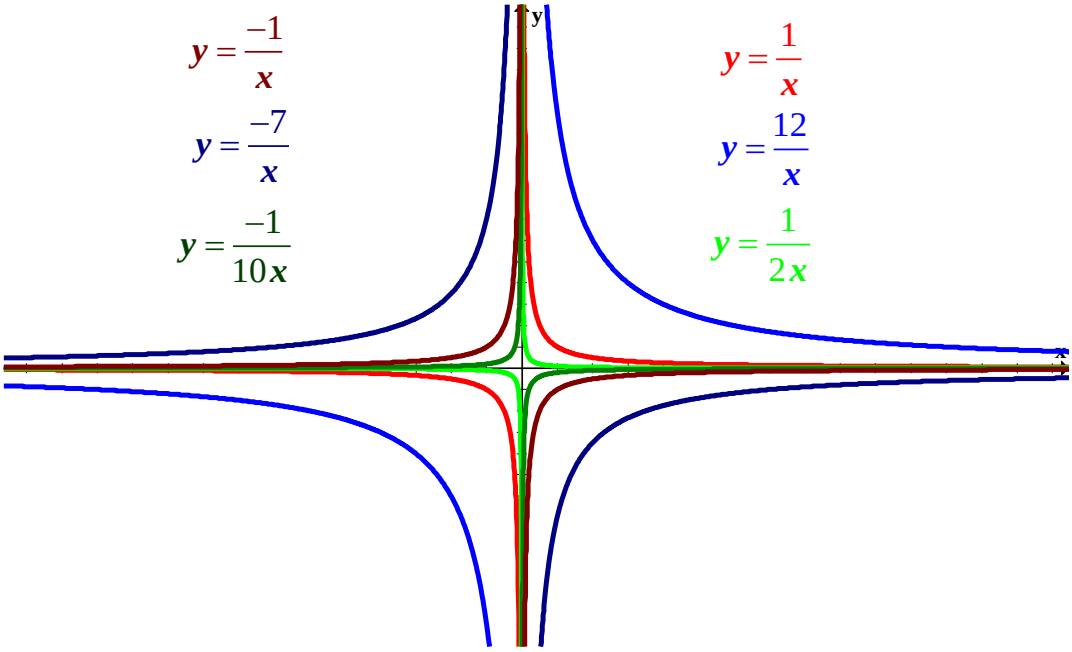
a. $(-5,2)$ b. $(4,-9)$ c. $(1,1/2)$

Orokorrean, $y=\frac{k}{x}$ adierazpena duten hiperbolek propietate hauek dituzte:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - k-ren balio absolutua handitzen bada, kurba koordenatu-jatorritik aldendu egiten da.
  - k-ren balio absolutua txikitzen bada, kurba koordenatu-jatorrira hurbiltzen da.
- **Definizio-eremua:** 0 ez den zenbaki erreal denak, hau da, $\mathbb{R}-\{0\}$.
- **Ibilbidea:** 0 ez den zenbaki erreal denak, hau da, $\mathbb{R}-\{0\}$.
- **Jarraitutasuna:** definizio-eremu osoan jarraitua da, baina $\mathbb{R}$ osoan, ordea, ez, 0 ez delako definizio-eremuko puntua, eta, beraz, balio horretan jauzi-infinitu bat du.
- **Simetria:** funtzio bakoitia da, hau da, koordenatu-jatorriarekiko simetrikoa da.
- **Asintotak:** x-ren eta y-ren balioak oso handiak egiten direnean, kurba koordenatu-ardatzetara hurbiltzen da, baina ez ditu inoiz ukitzen; beraz, ardatz hauek ($x=0$ eta $y=0$) kurbaren asintotak dira.

  Asintotek, hiperbola bi kurbatan banatzen dute; kurba bakoitzari **hiperbola-adar** deitzen diogu.
- **Hazkundea:** k-ren zeinuaren araberakoa da:
  - $k>0$ bada: funtzioa **beherakorra** da definizio-eremu osoan.

- $k < 0$ bada: funtzioa **gorakorra** da definizio-eremu osoan.



3.2. $y = \frac{k}{x-a} + b$ hiperbola

$y = \frac{k}{x}$ kurban oinarrituta posible al da beste mota bateko hiperbolak adieraztea? Parabolekin gertatzen zen bezala, a eta b parametroen balioen arabera, hasierako kurba plano kartesiarrean transladatu dezakegu horizontalki edo bertikalki.

Proposaturiko jarduerak

16. Adierazi balio-taula erabilita plano kartesiar berean hiperbola hirukote hauek:

a. $y = \frac{5}{x}$ $\quad y = \frac{5}{x} + 3$ $\quad y = \frac{5}{x} - 3$

b. $y = \frac{-12}{x}$ $\quad y = \frac{-12}{x-3}$ $\quad y = \frac{-12}{x+3}$

c. $y = \frac{3}{x}$ $\quad y = \frac{3}{x-1} + 5$ $\quad y = \frac{5x-2}{x-1}$

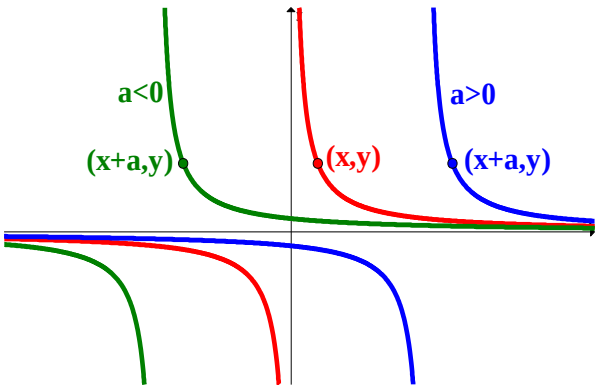
17. Deskribatu zer gertatzen den aurreko ariketako hiperboletan a eta b parametroak aldatzean.

Orokorrean, $y = \frac{k}{x-a} + b$ formako hiperbola a eta b parametroen araberako $y = \frac{k}{x}$ formako hiperbolaren translazioa da.

3.2.1. Translazio horizontalak

a aldagaiaren balioa aldatzean, hiperbolaren grafikoa horizontalki a unitate transladatzen da:

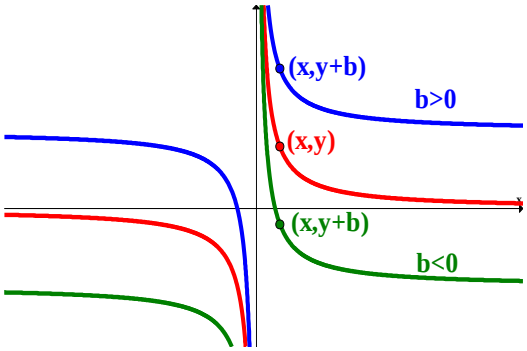
- $a > 0$ bada: hiperbola eskuinera transladatzen da.
- $a < 0$ bada: hiperbola ezkerrera transladatzen da.
- (x, y) puntua, $(x + a, y)$ puntuan bilakatzen da:
$$(x, y) \rightarrow (x+a, y)$$
- Translazio-bektorea $\vec{v} = (a, 0)$ da.



3.2.2. Translazio bertikalak

b aldagaiaren balioa aldatzean, hiperbolaren grafikoa bertikalki b unitate transladatzen da:

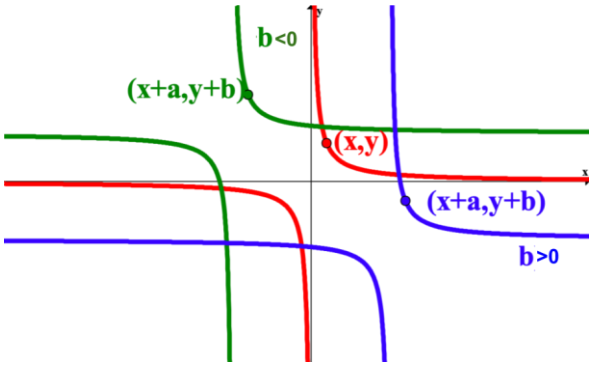
- $b > 0$ bada: hiperbola gorantza transladatzen da.
- $b < 0$ bada: hiperbola beherantza transladatzen da.
- (x, y) puntua, $(x, y + b)$ puntua izatera pasatzen da:
$$(x, y) \rightarrow (x, y+b)$$
- Translazio-bektorea $\vec{v} = (0, b)$ da.



3.2.3. Translazio zeiharrak

a-ren eta b-ren balioak aldatzean, hiperbolaren grafikoa parametroen balioen arabera transladatuko da zeiharki:

- Translazio norabideak a eta b parametroen zeinuen araberakoak izango dira.
- (x, y) puntua, $(x + a, y + b)$ puntua izatera pasatzen da:
$$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$
- Translazio-bektorea $\vec{v} = (a, b)$ da.



Proposaturiko jarduerak

18. Adierazi beheko alderantzizko proportzionaltasun funtzioak $y = \frac{5}{x}$ funtzioan oinarrituta:

a. $y = \dfrac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \dfrac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \dfrac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \dfrac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \dfrac{4}{x}$ f. $y = \dfrac{20}{5-x} - 2$

19. Aztertu aurreko alderantzizko proportzionaltasun funtzioen definizio-eremua, jarraitutasuna, simetria, asintotak eta hazkundea.

20. Idatzi a eta b parametroak aldatzean asintotak nola transladatzen diren adierazten duen arau bat.

3.3. $y = \frac{mx+n}{px+q}$ hiperbola

Adierazpen hori duten funtzioak alderantzizko proportzionaltasun funtzioak dira eta, ondorioz, hiperbola bidez adierazten dira. Horretarako, hori adierazteko eta aztertzeko ezagunagoa zaigun adierazpen mota izatera pasatu behar dugu:

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Zatiketa eginda: } (mx+n):(px+q) \rightarrow y = \frac{k}{x-a} + b$$

Ebatzitako jarduerak

- **Transformatu $y = \frac{3x+2}{x-7}$ adierazpen aljebraikoa adierazteko errazagoa izango den adierazpen aljebraikoan.**

  $3x+2$ zenbakitzailea $x-7$ izendatzaileaz zatituko dugu:

  $$(3x+2) = 3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)} = \frac{3(x-7)}{(x-7)} + \frac{23}{(x-7)} = \frac{23}{(x-7)} + 3$$

  Azken adierazpen hori oso erraz irudika daiteke.

Proposaturiko jarduerak

21. Adierazi hiperbola hauek:

a. $y = \frac{2x-4}{x+5}$ b. $y = \frac{3-5x}{x+2}$ c. $y = \frac{4x-12}{x-3}$

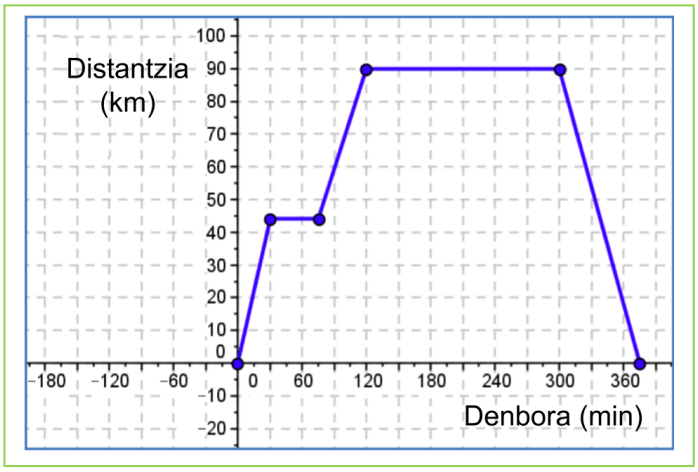
d. $y = \frac{6x+8}{1-x}$ e. $y = \frac{7x+5}{x-4}$ f. $y = \frac{6x+10}{2x-1}$

4. ZATIKA DEFINITUTAKO FUNTZIOAK

Grafiko askoren adierazpen aljebraikoa ezin dugu formula bakarrarekin adierazi.

Ebatzitako jarduerak

- **Grafiko honek DBHko 1. mailako ikasleek Bilbotik Donostiara egindako bidaia bat adierazten du. Bilatu grafikoaren adierazpen aljebraikoa.**



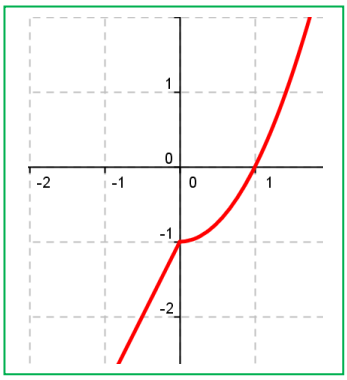
Mota horretako funtzioak **zatika definitutako funtzioak** izenez ezagutzen dira, zati bakoitzak adierazpen aljebraiko ezberdina duelako.

Kasu horretan, bost tarte ezberdin daude eta denak dira zuzenak. Zuzen bakoitzaren ekuazioa horietako bakoitza igarotzen den puntuak ezagutzen ditugulako kalkula dezakegu: $(0,0)$, $(30,45)$, $(75,45)$, $(90,120)$, $(90,300)$ eta $(0,360)$.

Hau da adierazpena:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{non} \quad 0\le x\le 30 \\ 45 & \text{non} \quad 30<x\le 75 \\ 5x-330 & \text{non} \quad 75<x\le 120 \\ 90 & \text{non} \quad 120<x\le 300 \\ -\frac{3}{2}x+360 & \text{non} \quad 300<x\le 360 \end{cases}$$

Adierazi grafikoki $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{non} \quad x\le 0 \\ x^2-1 & \text{non} \quad x>0 \end{cases}$ funtzioa.



0 baino txikiagoak diren balioetarako zuzen bat daukagu eta 0 baino handiagoak diren balioetarako parabola bat. Kurba bakoitza dagokion tartean adierazten dugu beti ere kontuan izanda $x=0$ puntuan kurbak elkartu egiten direla.

Proposaturiko jardurak

22. Adierazi zatika definitutako funtzio hauek:

a. $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{non} \quad x<0 \\ x-1 & \text{non} \quad x>0 \end{cases}$

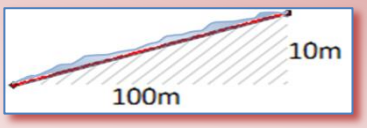
b. $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{non} \quad x<0 \\ 2x+2 & \text{non} \quad x>0 \end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{non} \quad x<1 \\ x+3 & \text{non} \quad x>1 \end{cases}$

BITXIKERIAK. ALDIZKARIA

Ezagutzen al duzu trafiko-seinale hau?

Ziurrenik inoiz bide ertzean ikusiko zenuen seinalea, baina ba al dakizu zer esan nahi duen? Bideak horizontalarekiko duen malda neurtzen du, kasu honetan malda % 10ekoa dela esan nahi du, hau da, malda 10/100 dela. Beraz, horizontalean egiten ditugun 100 metro bakoitzeko 10 metro igoko ditugu bertikalki.



- Bilatu Interneten Angliru-ko perfila eta kalkulatu nolakoak diren txirrindulariek igo beharreko aldapen maldak.

Arkimedes eta eguzki-izpiak

Zientziaren historiak izan duen ikertzaile garrantzitsuenetakotzat jotzen da Sirakusako Arkimedes (K.a. 287 – K.a. 212). Arkitekto, asmatzaile, matematikari, fisikari, ingeniari aritu zen eta asmakizun askoren sortzailea da; besteak beste, hari zor dizkiogu Arkimedesen printzipioa edo Arkimedesen torlojua.

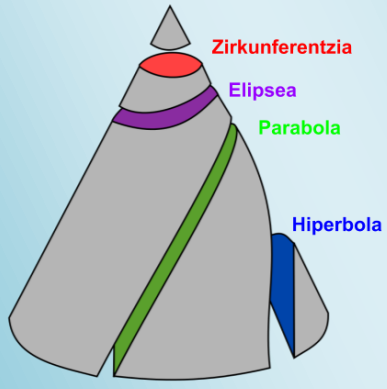
Erromatarrak Sirakusa inbaditzen ahalegindu zirenean, urteetan zehar saiatu arren, ez zuten lortu Arkimedesen asmakizunei esker. Kondairak dio Arkimedesi itsasontziak kiskaltzeko asmakizuna bururatu zitzaiola. Sirakusako amildegian zehar kokatuak zeuden ispilu-paraboliko erraldoi batzuekin eguzki-izpiak itsasontzietara bideratu eta haiek su hartzen zuten jasandako berotasunagatik.

Egia ote da kondaira hori? Azken urteetan ikerketa ugari egin dira esperimentu horretan oinarrituta eta posible dela konprobatu da. Gainera, aipatzekoa da eguzki-labeen sistema metodo berean oinarritzen dela.

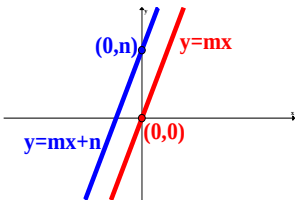
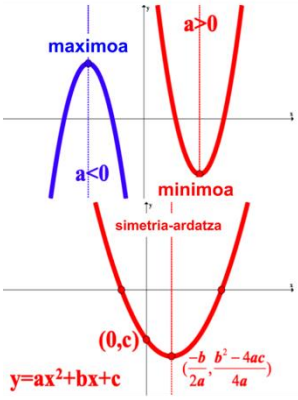
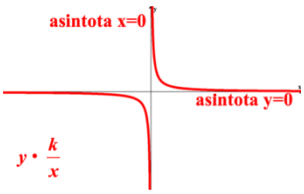
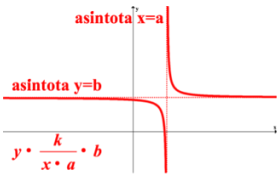
Pergako Apolonio

Parabolen eta hiperbolen inguruan hitz egiten aritu gara, baina nondik datoz hitz eta forma horiek?

Kurba horien izena Pergako Apoloniori (K.a. 263 – K.a. 190) zor diogu, *Konikak* lanean forma horiek aztertu zituelako. Kurba horiek lortzeko kono bat hainbat planoz (angeluaren araberakoak) ebakitzen da.



LABURPENA

Lehenengo mailako funtzio polinomikoak: zuzenak $y = m \cdot x$ $y = m \cdot x + n$	Lehenengo mailako polinomioak dira eta **zuzen** bidez adierazten dira. Bi motatakoak daude: - **Funtzio linealak** edo **zuzenki-proportzionalak:** $y = mx$, koordenatu-jatorritik igarotzen dira. - **Funtzio afinak:** $y = mx + n$; $y = mx$ funtzioa OY ardatzean n unitate transladatzen dira. $(0, n)$ puntutik igarotzen dira.	
Bigarren mailako funtzio polinomikoak: parabolak $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	Bigarren mailako polinomioak dira, eta **parabola** bidez adierazten dira: **Erpina:** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$ **OX ardatzarekiko ebaketak:** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. **OY ardatzarekiko ebaketa:** $x = 0$, beraz $(0, c)$ puntua da. **Simetria-ardatza**: $x = \frac{-b}{2a}$ zuzena da.	
Alderantzizko proportzional-tasun funtzioak: hiperbolak $y = \frac{k}{x}$	$\lvert k \rvert$: koordenatu-jatorritik aldendu edo hurbiltzen da. **Definizio-eremua** eta **ibilbidea:** 0ren ezberdinak diren zenbaki erreal denak, hau da, $\mathbb{R} - \{0\}$. **Jarraitutasuna:** jarraitua definizio-eremu osoan; $x = 0$ puntuan asintota bertikala. **Simetria:** bakoitia, koordenatu-jatorriarekiko simetrikoa. **Asintotak:** $x = 0$ eta $y = 0$ zuzenak. **Hazkundea:** - $k > 0$: **beherakorra** $(-\infty, 0)$-n eta **gorakorra** $(0, +\infty)$-n. - $k < 0$: **gorakorra** $(-\infty, 0)$-n eta **beherakorra** $(0, +\infty)$-n.	
Hiperbolak $y = \frac{k}{x-a} + b$	$y = \frac{k}{x}$ hiperbola $\vec{v} = (a, b)$ translazio-bektoreaz transladatzearen ondorio dira: - **Definizio-eremua**: $\mathbb{R} - \{a\}$ - **Ibilbidea**: $\mathbb{R} - \{b\}$ - **Puntuak**: $(x, y) \to (x + a, y + b)$ - **Asintotak**: $\{x = 0 \to x = a\}; \{y = 0 \to y = b\}$	

ARIKETAK ETA PROBLEMAK

Funtzio linealak

1. Adierazi grafikoki taula honetan emandako proportzionaltasun-erlazioa eta lortu bere ekuazioa. Deskribatu zer motatako erlazioa den.

A magnitudea (a)	–5	–2	0	1	3
B magnitudea (b)	–15	–6	0	3	9

2. Adierazi honako zuzen hauek:

a) $y = 5x$ **b)** $y = -5x$ **c)** $y = (1/2)x$ **d)** $y = 2{,}3x$

3. Aztertu honako funtzio lineal hauen definizio-eremua, maximoak eta minimoak, eta simetriak:

a) $y = 1{,}5x$ **b)** $y = -0{,}5x$.

4. Aztertu $y = 0{,}7x$ funtzioa $[2,5]$ tartean.

5. Kalkulatu (1, 4) eta (0, 0) puntuetatik igarotzen den zuzenaren malda eta lortu bere adierazpen aljebraikoa.

6. Adierazi funtzio lineal hauek:

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = -x + 5$ **c)** $y = 3x - 2$ **d)** $y = -2x - 3$

7. Kalkulatu (1,4) eta (2,1) puntuetatik igarotzen den zuzenaren malda eta lortu bere adierazpen aljebraikoa.

8. Kalkulatu puntu-bikote bakoitzetik igarotzen den zuzenaren malda eta lortu zuzen horren adierazpen aljebraikoa:

a) (5, 1) eta (3, –2) **b)** (–3, 4) eta (4, –1) **c)** (1, 4) eta (0, 6) **d)** (–2, –4) eta (–1, 0)

9. Bi telefono konpainiaren eskaintzak hauek dira: StarTel enpresak dei bakoitzeko 50 zentimo eta hitz egindako minutu bakoitzeko 2 zentimo ordaintzea eskaintzen du; Tel-Hello enpresak, berriz, dei bakoitzeko 75 zentimo ordaintzea eta dei-minutu amaigabeak eskaintzen ditu. Zein eskaintza da ekonomikoagoa? Erantzun egokia bilatzeko, jarraitu pauso hauei eta eman erantzunak grafikoki eta analitikoki:

a. Ba al dago bi eskaintzak berdinak diren unerik?

b. Egunean batezbeste 15 minutu hitz egiten baditut, zein da komeni zaidan eskaintza?

c. Egunean batezbeste 35 minutu hitz egiten baditut, zein da komeni zaidan eskaintza?

d. Egunean batezbeste 3 minutuko iraupena duten 10 telefono-dei egiten baditut, zein da komeni zaidan eskaintza?

e. Egunean batezbeste 30 minutuko iraupena duten 2 telefono-dei egiten baditut, zein da komeni zaidan eskaintza?

f. Zein eskaintza da ekonomikoagoa?

10. Bere azken nobela argitaratzeko zenbait argitaletxeren eskaintzak ditu James Joyce idazleak. Dole argitaletxeak 100 € eskaintzen dizkio eta saldutako liburu bakoitzaren % 20a. Letrarte argitaletxeak,

ordea, 350 € eskaintzen dizkio. Azkenik, Pako argitaletxeak saldutako liburu kopuruaren araberako eskaintza egin dio: 250 liburu salduz gero, 50 €; 100 € 500 liburu arte saltzen baditu; 1.000 liburu arte salduz gero, 300 €; eta 500 € 1.000 liburu baino gehiago saltzen baditu. Editorialen eskaintzen artean, zein da idazleari gehien komeni zaiona?

Funtzio koadratikoak

1. Marraztu parabola hauen grafikoak $y = x^2$ parabolan oinarrituta:

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = -x^2 + 5$ **c)** $y = (x - 2)^2$ **d)** $y = (-x - 3)^2$

2. Marraztu parabola hauen grafikoak $y = x^2$ parabolan oinarrituta:

a) $y = 2{,}5x^2$ **b)** $y = -1{,}2x^2$ **c)** $y = (1/2)x^2$ **d)** $y = -0{,}7x^2$

3. Adierazi funtzio paraboliko hauek eta kalkulatu erpina:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ **b)** $y = -x^2 + 5x - 4$ **c)** $y = (x - 2)^2 + 4$ **d)** $y = -x^2 + x - 3$

4. Kalkulatu honako parabola hauen elementuak:

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ **b)** $y = -2x^2 + 4x - 1$ **c)** $y = 4(x - 2)^2 + 9$ **d)** $y = -5x^2 + 2x - 6$

Alderantzizko proportzionaltasun funtzioak

5. Kalkulatu beheko puntu bakoitzetik pasatzen den $y = \frac{k}{x}$ formako hiperbolaren adierazpen aljebraikoa eta adierazi. Adierazi, baita, zein tartetan den gorakorra eta zeinetan beherakorra.

a) (5, 1) **b)** (4, –1) **c)** (1, 4) **d)** (–2, –4).

6. Adierazi alderantzizko proportzionaltasun funtzio hauek:

a) $y = 2/x$ **b)** $y = -1/x$ **c)** $y = 3/x$ **d)** $y = -2/x$.

7. Kalkulatu hiperbola hauen definizio-eremua, ibilbidea, jarraitutasuna, maximoak eta minimoak, eta hazkundea:

a) $y = 2{,}3/x$ **b)** $y = -1{,}7/x$ **c)** $y = 3{,}2/x$ **d)** $y = -2{,}1/x$.

8. Adierazi hiperbola hauek:

a) $y = 2/x + 3$ **b)** $y = -1/x + 5$ **c)** $y = 3/x - 2$ **d)** $y = -2/x - 3$

9. Adierazi hiperbola hauek:

a) $y = 2/(x + 3)$ **b)** $y = -1/(x + 5)$ **c)** $y = 3/(x - 2)$ **d)** $y = -2/(x - 3)$

10. Adierazi hiperbola hauek beste forma batez, eta adierazi:

a) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ **b)** $y = \frac{-x-3}{2x+1}$ **c)** $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ **d)** $y = \frac{x+2}{-x-3}$

Zatika definitutako funtzioak

11. Adierazi $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < -1 \\ x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$ funtzioa.

12. Kalkulatu $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$ funtzioak non ebakitzen dituen ardatz-koordenatuak.

13. Kalkulatu $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{non} \quad x < 2 \\ -x^2 + 4 & \text{non} \quad x > 2 \end{cases}$ funtzioa gorakorra den tarteak.

14. Adierazi zatika definitutako funtzio hau: $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 1 \\ 1/x, & x > 1 \end{cases}$.

AUTOEBALUAZIOA

1. Esan zein balio hartzen dituzten $y = 4x + 2$ zuzenaren maldak (m) eta jatorriarekiko ordenatuak (b):

a) $m = 4$, $b = 0$ **b)** $m = 1/2$, $b = 6$ **c)** $m = 2$, $b = 4$ **d)** $m = 4$, $b = 2$

2. Balio hauetako zein dira (1, 6) eta (–2, 4) puntuetatik igarotzen den zuzenaren malda (m) eta jatorriarekiko ordenatuak (b)?:

a) $m = 2$, $b = 4$ **b)** $m = 3/2$, $b = 6$ **c)** $m = 2/3$, $b = 16/3$ **d)** $m = 6$, $b = 2/3$

3. Funtzio lineal hauetatik zein da simetrikoa koordenatu-jatorriarekiko:

a) $y = (-10/17)x$ **b)** $y = 3x + 1$ **c)** $y = 4x + 2$ **d)** $y = -x + 3$

4. Funtzio koadratiko hauetatik zein da simetrikoa koordenatu-ardatzekiko:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ **b)** $y = 3x^2 + 2x + 1$ **c)** $y = 4x^2$ **d)** $y = -x^2 + 3x + 2$

5. Kalkulatu $y = 3x^2 + 1$ funtzio koadratikoaren erpina:

a) (0, 1) **b)** (1, 2) **c)** (0, 2) **d)** (0, 3)

6. Funtzio koadratiko hauetatik zein da $y = x^2$ baino *estuagoa*?

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ **b)** $y = 3x^2 + 2x + 1$ **c)** $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ **d)** $y = -x^2 + 3$

7. Hiperbola hauetatik zein da simetrikoa koordenatu-jatorriarekiko:

a) $y = -15/(21x)$ **b)** $y = 3/x + 1$ **c)** $y = 4/x + 2$ **d)** $y = -1/x + 3$

8. Beheko zein hiperbolak dauzka asintotatzat $x = 2$ eta $y = 3$ zuzenak?

a) $y = -15/(x - 3) - 2$ **b)** $y = 3/(x - 2) + 3$ **c)** $y = 4/(x + 2) - 3$ **d)** $y = -12/(x + 3) + 2$

9. $y = 3/x$ hiperbola (1, 3) translazio bektorearen bidez transladatzen badugu, zein hiperbola lortuko dugu:

a) $y = 3/(x - 1) + 3$ **b)** $y = 3/(x - 3) + 1$ **c)** $y = 3/(x + 3) - 1$ **d)** $y = -3/(x + 1) - 3$

10. Jarraian dituzun zein funtzio koadratikok dauka minimo absolutu bat?

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ **b)** $y = 3x^2 + 2x + 1$ **c)** $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ **d)** $y = -x^2 + 3$