

MATRIZEAK

Irakaslearentzako gida didaktikoa

Pedagogia taldea

Alaitz Romo Arizmendi
Santo Tomas Lizeoa. Donostia-San Sebastián

Manex Mujika Amunarriz
Santo Tomas Lizeoa. Donostia-San Sebastián

Mikel Arcelus Alonso
Tecnun. Universidad de Navarra.
Donostia-San Sebastián

Talde teknikoa

Carmen Blanco del Prado
Tecnun. Universidad de Navarra.
Donostia-San Sebastián

Nicolás Serrano Bárcena
Tecnun. Universidad de Navarra.
Donostia-San Sebastián

Íñigo Gutiérrez García
Tecnun. Universidad de Navarra.
Donostia-San Sebastián

Kevin Claderón Maceda
Tecnun. Universidad de Navarra.
Donostia-San Sebastián

Una vez aprobada la idoneidad se pondrá aquí la siguiente frase:

“Ikastaro honetako edukiak EIMA-ren oniritzia jaso du (data)”.

1. Codex erraminta

Eduki didaktikoak online editatzeko erraminta da Codex. Irakasleak elementu teoriko zein praktikoak sor ditzake ikasleak landu ditzan.

Codex barruko elementuak askotarikoak izan daitezke: eduki teorikoa duten apunteak, zuzenketa automatikoa duten online ariketak, Geogebra bezalako aplikazioetara lotura dutenak eta abar. Irakasleak sortzen dituen elementu horiek guztiak modu ordenatu eta egituratuan jasotzen dira eta ikasleari lan-koadernoaren erara aurkezten zaizkio.

Codex, edozein ikasgaitarako erabil daitezkeen arren, Matematikak dituen behar espezifikoak erantzuteko diseinatu da. Merkatuan online azterketak eta ebaluazioak egiteko produktu asko daude era askotako galde-erantzunak onartzen dituztenak (egia/gezurra, erantzun anitz, hutsuneak bete eta abar). Matematikarako, baina, ez dira egokiak izaten, ikasgai honetan erantzunak hainbat modutan idatz daitezkeen adierazpen algebraikoak izaten baitira. Codex-ek adierazpen algebraikoak erabiltzea ahalbidetzen du, bai enuntziatuetan eta bai automatikoki ebaluatzen diren erantzunetan ere.

Ariketen ebaluazio automatikoak abantaila ugari ditu. Horietan garrantzitsuenetako bat autoebaluatze gaitasuna garatzea da; izan ere, koaderno edo ariketak bukatzean, sistemak egindakoaren informazioa bidaltzen dio ikasleari. Informazio hori kuantitatiboa eta kualitatiboa da eta, beraz, ikasleak bere ikasketa-prozesua doitu dezake informazio hori erabiliz.

Online erraminta bat izanik, ikasleak edozein gailutan eta lekutan izango du eskura; baldintza bakarra Interneteko konexioa edukitzea da. Irakasleak, beraz, edozein unetan egin dezake lan bere koadernoko elementuetan eta utzitako lekuan berreskuratuko du.

1. Helburuak

Matrizeak ikasgaia **Codex** erremintaren bidez garatu da eta, Batxilergoko 2. mailako Matematikako ikasleei dago zuzendua. Matematikako “2. Multzoa. Aljebra” ataletako gaiak lantzen ditu: matrizeak eta determinanteak, eta ekuazio-sistemak ebaztea¹.

Proiektuaren helburu nagusia konpetentzia matematikoa lantzea den arren, oinarriko konpetentziak, zehar-konpetentziak nahiz diziplina barneko konpetentziak, ere lantzen ditu. Jarraian, helburu didaktikoak zehaztuko dira.

127/2016 dekretua osatzen II. eranskineko Batxilergoaren curriculumean matematikarako zehazten diren zortzi helburuetatik, hauek dira, bereziki, proiektuan landuko direnak:

- “Matematikari berari edo beste zientzia batzuei buruzko problemak planteatzea eta ebaztea, hipotesiak adieraziz, zenbait estrategia hautatuz eta erabiliz, ebazpen-prozesua arrazoituz, emaitzak justifikatuz eta egoera berriei aplikatzea, gaur egungo gizarteko erronken aurrean modu efizienteagoan jardun ahal izateko.” (1. helburua)

- “Hizkuntzaren beraren tresnak eta adierazpen matematikoa (zenbakiak, adierazpen algebraikoak, grafikoak, funtzioak, irudiak, ikur erabilienak, etab.) autonomiaz eta sormenez

¹ Cfr. Batxilergoko curriculum

https://www.euskadi.eus/contenidos/informacion/inn_heziberri_dec_curriculares/eu_def/adjuntos/Batxilergoko_curriculum_osoa.pdf Matematikarako Konpetentzia.

Matematika. 2. Batxilergoko edukiak. 4. Multzoa. Aljebra. 236. orrialdea.

erabiltzea, eta gai, idazkera eta adierazpen matematikoak ulertzea eta erabiltzea, norberaren pentsaera argi eta garbi eta koherentziaz adierazteko” (5. helburua)

- “Jarduera matematikoko eta ikerketa zientifikoko jarrerak eskuratzea eta erabiltzea, lanerako beharrezkoak eta ohikoak direlako; esate baterako, hizkuntza matematikoaren balioespena, egiaztatzea, datuak kontrastatzea, argudioen analisi kritikoa, prozesuen eta emaitzen berrikuspen sistematikoa, eta taldeko lanaren balioespena.” (8. helburua)

Helburu hauez gain, ikaslea, zientzia ezberdinei dagozkien fenomenoak deskribatzeko, aztertzeke eta aurreratzeko lengoia matematikoak duen garrantziaz jabetzea, bilatzen da. Aljibraren atal honetan, lehen aldiz erabiliko dute ikasleek matrizeen lengoia eta, beraz, beste zientzietan ere maiz erabiltzen diren batukariak eta azpiindizeak ezagutuko dituzte.

Helburu hauek matematikarako konpetentziaren osagai asko lantzeko aukera ematen dute:

- Ezagutza matematikoak ezagutzea, erlazionatzea, integratzea eta baloratzea.
- Arrazoitzeko moduak erabiltzea, bai norberaren ondorioak eta jarraitutako prozesua justifikatzeko, bai besteek aurkeztutako emaitzak kritikoki aztertzeke.
- Errealitatea kalkulatzeko, irudikatzeko eta interpretatzeko prozedura matematiko egokiak hautatzea eta erabiltzea, informazioaren eta komunikazioaren teknologiak erabilia, eraginkorragoak izateke.

Hurrengo atalean, materialaren egitura eta edukiak zehaztuko dira.

2. Edukiak

Jarraian, proiektuan garatzen diren kontzeptuzko, prozedurazko eta jarrerazko edukiak deskribatuko dira.

1. Kontzeptuzko edukiak

1.1. Matrizeak eta determinanteak

- Matrizeak aztertzea, tauletan eta grafoetan egituratutako datuekin maneiatzeko eta jarduteko tresna gisa.
- Matrize motak.
- Determinantea.
- Matrize baten heina.
- Matrize karratu baten alderantzizko matrizea.

1.2. Ekuazio-sistemen ebazpena

- Ekuazio linealen sistemak, sistema baliokideak eta lotutako matrizeak.
- Sistema baten matrize-adierazpena.
- Sistemen sailkapena soluzio kopuruaren arabera. Rouché-Frobeniusen teorema.

2. Prozedurazko edukiak

2.1. Matrizeak eta determinanteak

- Eragiketak matrizeekin: batuketa, eskalarra eta matrizearen arteko biderketa, matrizeen arteko biderketa, matrize iraulia.
- Matrize karratu baten n . berreduraren frogapena indukzio metodoa erabiliz.
- 2 eta 3 ordeneko determinanteak kalkulatzeko.
- Edozein ordeneko determinanteak kalkulatzeko, propietateak aplikatuz eta lerro bateko elementuetatik abiatuta.

- Matrize baten heina kalkulatzeko, Gauss-en metodoa eta determinanteen metodoa erabiliz.
- Matrize karratu baten alderantzizkoa kalkulatzeko, Gauss-en metodoa eta adjuntuen metodoa erabiliz.

2.2. Ekuazio-sistemak ebaztea

- Sistemak ebaztea, Gauss-en metodoa erabiliz.
- Sistemak ebaztea, Cramer-en erregela erabiliz.
- Parametroen menpeko ekuazio linealen sistemak eztabaidatzea eta ebaztea.

3. Jarrerazko edukiak

- Arazoak planteatzeko eta konpontzeko konfiantza izatea.
- Emaizak bilatzeko diziplina, esfortzua eta iraunkortasuna izatea.
- Tolerantzia eta lasaitasuna izatea, ariketak eta problemak ebaztean egindako akatsen eta lorpenen aurrean.
- Emaizak zuzen eta zehatz aurkeztea.

3. Egitura

Ikastaroaren egitura eta edukiak azaltzeko eta azalpena errazteko asmoz, elementuak koadernotan eta ataletan banatu dira. Dena den, irakasle bakoitzak elementuak nahi dituen moduan eta unean erabili ahal izango ditu eta bai berriak sortu ere. Gida didaktiko honen eranskinean azaltzen da nola egin daitekeen.

Honoko atal hauek ageri dira:

0. Sarrera

Adierazpen algebrakoak behar bezala nola idatzi azaltzen da azalpen motz eta adibideen bidez.

Lehenengo hurbilketa batean zaila dirudien arren, esperientziagatik dakigu ikasleek erraz bereganatzen dutela aplikazioaren sintaxia. Ikasleak paperean lan egingo du normalean eta erantzuna lortu ondoren bakarrik sartuko du erramintan, ebaluazio automatikoa egiteko.

1. Matrizeak eta determinanteak

1.1. Matrizeak.

Matrize kontzeptua sartu da, datuak modu egituratuan erabiltzeko tresna gisa. Matrize bat irudikatzen erabilitako nomenklatura eta haren elementu bakoitza, matrize baten dimentsioa, matrize errenkada eta matrize zutabea definitu dira.

Bost ariketa erraz proposatu dira, ikasleak kontzeptu horiekin ohitzeko eta azpiindizeen erabilera trebatzeko.

1.2. Matrize motak.

Matrize mota desberdinak deskribatu dira: laukizuzenak edo karratuak, matrize diagonalak, unitate matrizea eta matrize nulua. Era berean, matrize trianguluarra eta matrize simetrikoa definitu dira.

Bost ariketa proposatu dira, ikasleak matrize motak identifika ditzan.

1.3. Matrizeekin egindako eragiketak.

Matrizeekin egiten diren eragiketak eta horien propietateak definitu dira:

- Matrizeen arteko batuketa eta batuketaren propietateak (elkarkorra, trukakorra, elementu neutroa eta aurkako elementua).
- Matrizeen arteko kenketa.

- Matrizea eta eskalarraren arteko biderketak eta biderketaren propietateak.
- Matrizeen arteko biderketa eta biderketaren propietateak (elkarkorra, banakorra eta elementu neutroa). Azpimarratu da matrizeen produktua ez dela trukakorra.

Hogei ariketa proposatu dira, matrizeen arteko eragiketak, ekuazioen eta matrize-sistemen ebazpena, matrize arteko biderketaren trukakortasun ezaren egiaztatapena eta abar nahastuz. Era berean n . berreduraren adierazpen orokorra indukzioz frogatzeko adibideak azaldu dira, eta mota horretako ariketak proposatu dira.

Lehenengo ariketetan, erantzuna matrize moduan eman beharko du ikasleak, gelaxka bakoitza dagozkion elementuarekin betez. Azken ariketetan, berriz, ikasleek programazio-lengoiaren moduan sartu behar dituzte matrizeak. Adibidez, $[[[1,0,2,1], [6,2,0,3]$ bi errenkada eta lau zutabeko matrizea litzateke.

1.4. Determinanteak.

Hasteko, 2 eta 3 ordeneko determinanteak nola definitu dira, nola kalkulatzaren azalduz, eta bost ariketa proposatu dira.

Edozein ordeneko determinanteen kalkulua azaltzeko, aldezturik, elementu baten minor osagarria eta adjuntua definitu dira. Ondoren, 3 ordeneko matrize bat emanik, egiaztatu da errenkada edo zutabe bateko elementu bakoitzaren eta hari dagozkion adjuntuen arteko biderketen batura bat datorrela Sarrusen erregelaren bidez lortzen den determinantearen balioarekin. Horrela, modu logikoan proposatu da edozein ordeneko matrizeen determinanteen kalkulua, adjuntuen bidez garatuta.

Determinanteen propietateak adierazi dira eta frogatu dira (edo egiaztatu dira), eta determinante horiek sinplifikatuz, edozein ordeneko determinanteak nola kalkulatu daitezkeen adierazi da. Bi adibide ebatzi ondoren, determinanteak kalkulatzeko eta propietateak aplikatzeko hamar ariketa proposatu dira.

1.5. Matrize baten heina.

Matrize baten heinaren kontzeptua azaldu da, bi modutan:

- matrizearekiko linealki independenteak diren errenkada edo zutabe kopuru maximo gisa
- nulua ez den minoren baten orden gisa, baldin eta goragoko mailako minoren guztiak nulua badira.

(Bi definizioen baliokidetasunaren frogapenak batxilergoko 2. mailako edukia gainditzen du eta ez da proiektu honetan sartzen).

Bi definizioak ematearen helburua matrize baten heina minoren metodoaren bidez edo Gauss-en metodoaren bidez kalkulatu ahal izatea da. Bi metodoen adibideak eman dira, eta matrize baten 4 ordenarainoko heina kalkulatzeko bost ariketa proposatu dira.

1.6. Matrize karratu baten alderantzizkoa.

Matrize baten alderantzizko kontzeptua definitu da eta haren propietateak deskribatu dira. Alderantzizko matrizea lortzeko adjuntuen metodoa azaldu da.

Alderantzizko matrizearen existentziari eta kalkulari buruzko 10 ariketa proposatu dira.

2. Ekuazio linealen sistemak

2.1. Sistema baliokideak eta sistemari dagozkion matrizeak.

Sistema baliokideen kontzeptua, adibideen bidez, sartu da. Ekuazio-sistema bati dagozkion matrizeak nola lortu deskribatu da. Adibideen bidez, existitzen diren sistemen sailkapena

deskribatu da, dituzten soluzioen kopuruaren arabera (bateraezinak, bateragarri determinatuak eta bateragarri indeterminatuak).

Sistema baten matrize-irudikapena azaldu da.

Bost ariketa proposatu dira ikasleak sistemen notazioarekin eta sailkapen horrekin ohitzeko.

2.2. Sistema linealen ebazpena, Gauss-en metodoa erabiliz.

Ekuazio-sistema baten ebazpenerako Gauss-en metodoa azaldu da.

Zazpi ariketa proposatu dira.

2.3. Sistema bateragarri determinatuen ebazpena, Cramer-en arauaren bidez.

Cramer-en erregela azaldu eta adibide batzuk ebatzi ondoren, metodo horren bidez, sistemak ebazteko hiru ariketa proposatu dira.

2.4. Rouché-Frobenius-en teorema.

Rouché-Frobenius-en teorema azaldu da eta, teorema erabiliz ekuazio linealen sistemak nola eztabaida daitezkeen azaldu da, adibideen bitartez.

Rouché-Frobenius-en teorema erabiliz, parametroekin eta parametririk gabe sistemak eztabaidatzeko hamar ariketa proposatu dira.

Atal honetan, bi eta hiru ezezaguneko ekuazio linealen sistemen interpretazio geometrikoa azaldu da, grafiko dinamiko eta interaktiboekin ilustratuz.

3. Metodologia

Aipatu bezala, erraminta irekia da eta, beraz, irakasleak bere beharren arabera antolatuko ditu elementuak (edo berriak sortu) koadernoetan. Irakasleak egindako programazioaren arabera erabakiko du zer elementu diren egokienak une bakoitzean.

Materiala eta erraminta oso malguak izanik, modu ezberdinetan erabil daiteke:

- Alderantziko ikasgela deituriko metodologiarako material bezala, non ikasleak klasera joan aurretik edukiak lantzen dituen eta autoebaluazioak egiten. Irakasleak ikasleen errendimendua ikusi ahal izango du ikasle bakoitza non dagoen jakiteko.
- Klasean lan egiteko material bezala. Irakaslearen azalpenaren ondoren egiteko ariketa ugari daude. Erraminta honen bidez, irakasleak jakin dezake ikasle bakoitza nola ari den, eta, horrela, zailtasuna gehien dutenengana hurbildu daiteke, aurreratuen dabiltzanei ariketa berriak proposatu eta abar.
- Etxean lan egiteko material bezala. Ariketak automatikoki zuzentzen direnez eta ikasleak egindakoaren inguruko mezuak jasotzen dituzenez, ikasleak bere ikasketa prozesua doitu dezake irakasleak klasean egin dezakeen zuzenketara itxaron beharrik izan gabe. Elementuak eta koadernoak diseinatzean, irakasleak definituko du ikasleak zenbat aukera izango dituen ariketa bat egiteko. Zenbait ariketatik Geogebra-ko applet-ak txertatu dira ikasleak bere emaitza bertan konproba dezan, emaitza dagokion gelaxkan jarri aurretik.
- Irakasleak ebaluatzeko erraminta bezala. Irakasleak koaderno bat diseina dezake, ikasleak denbora jakin batean egin dezan eta automatikoki zuzendutako emaitzak irakasleak erabakitzen duenean bakarrik ikusi ahal izan ditzan.

Enuntziatuak parametrizatzeko aukera oso baliagarria da ikasle bakoitzak ariketa berdina baina parametro ezberdinak izango dituelako. Hori horrela, azterketetan zein etxerako lanetan enuntziatuak pertsonalizatuak izango dira.

4. Baliabide gehigarriak

Irakasleak, beraz, diseinatutako materiala erabil dezake, baina nahi dituen elementuak sortu eta igo ditzake plataformara bere ikasleen beharren arabera.

Material gehigarria ere txerta dezake: bibliografia, web orriak, albisteak eta abar.

Gidaren eranskinean azaltzen da irakasleak bere materiala nola sortu.